Evaluation des incertitudes sur les grandeurs physiques

Plan :

- ❑ **Comment faisait-on avant ?**
- ❑ **Comment fait-on maintenant ?**
  - **la démarche**
  - **étapes essentielles de la méthode**

Document destiné à l'usage des professeurs

Evaluation des incertitudes sur les grandeurs physiques

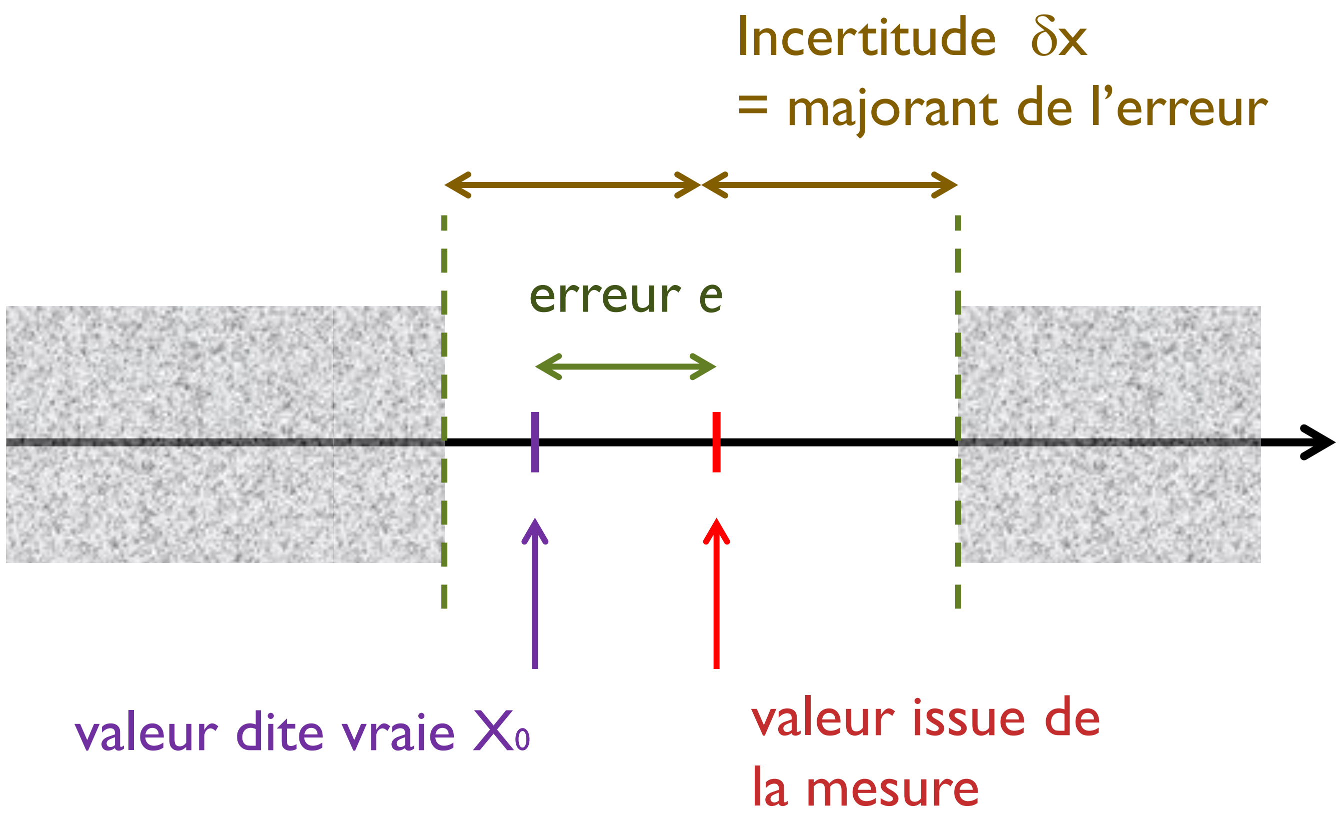
Plan :

- ❑ **Comment faisait-on avant ?**
- ❑ **Comment fait-on maintenant ?**
  - **la démarche**
  - **étapes essentielles de la méthode**

Document destiné à l'usage des professeurs

Incertitudes sur les grandeurs physiques

Comment faisait-on « avant » ?



Incertitudes sur les grandeurs physiques

Comment faisait-on « avant » ?

Autrement dit …

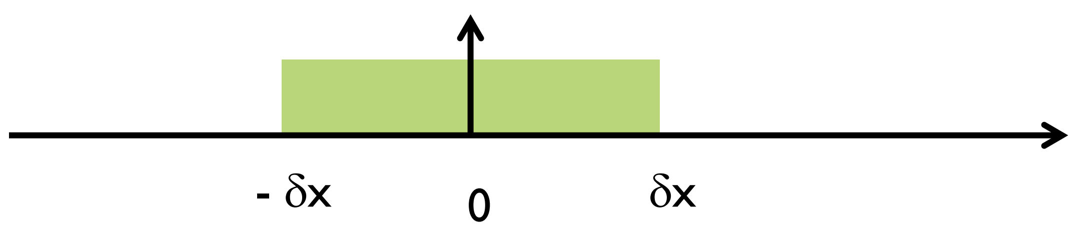
La valeur dite vraie (ce qu'on cherche à connaître) est donnée par l'égalité approximative (!) :

$$X_0 = x \pm \delta x$$

ou l'inégalité :

$$x - \delta x \leq X_0 \leq x + \delta x$$

ce qui sous entend une distribution rectangulaire uniforme de l'erreur

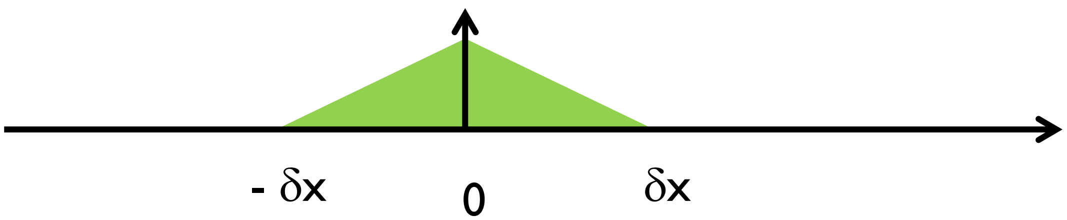


Incertitudes sur les grandeurs physiques

Comment faisait-on « avant » ?

Inconvénient : une distribution rectangulaire uniforme de l'erreur donne un poids souvent exagéré aux valeurs extrêmes.

Il est plus raisonnable d'envisager une distribution du genre :



Incertitudes sur les grandeurs physiques

Comment faisait-on « avant » ?

Autre inconvénient :

La réalisation de n mesures indépendantes x_i d'une même grandeur ne réduisait pas l'incertitude par rapport à une mesure unique :

$$\delta(x_{moy}) = \delta\left(1/n \times \sum \delta x_i \right) = 1/n \times n \times \delta x_i = \delta x_i$$

Le calcul d'incertitudes à partir des différentielles ne convient plus. On doit utiliser, explicitement ou implicitement, les résultats des mathématiques statistiques.

Evaluation des incertitudes sur les grandeurs physiques

Plan :

- **Comment faisait-on avant ?**
- **Comment fait-on maintenant ?**
  - **la démarche**
  - **étapes essentielles de la méthode**

Document destiné à l'usage des professeurs

Incertitudes sur les grandeurs physiques

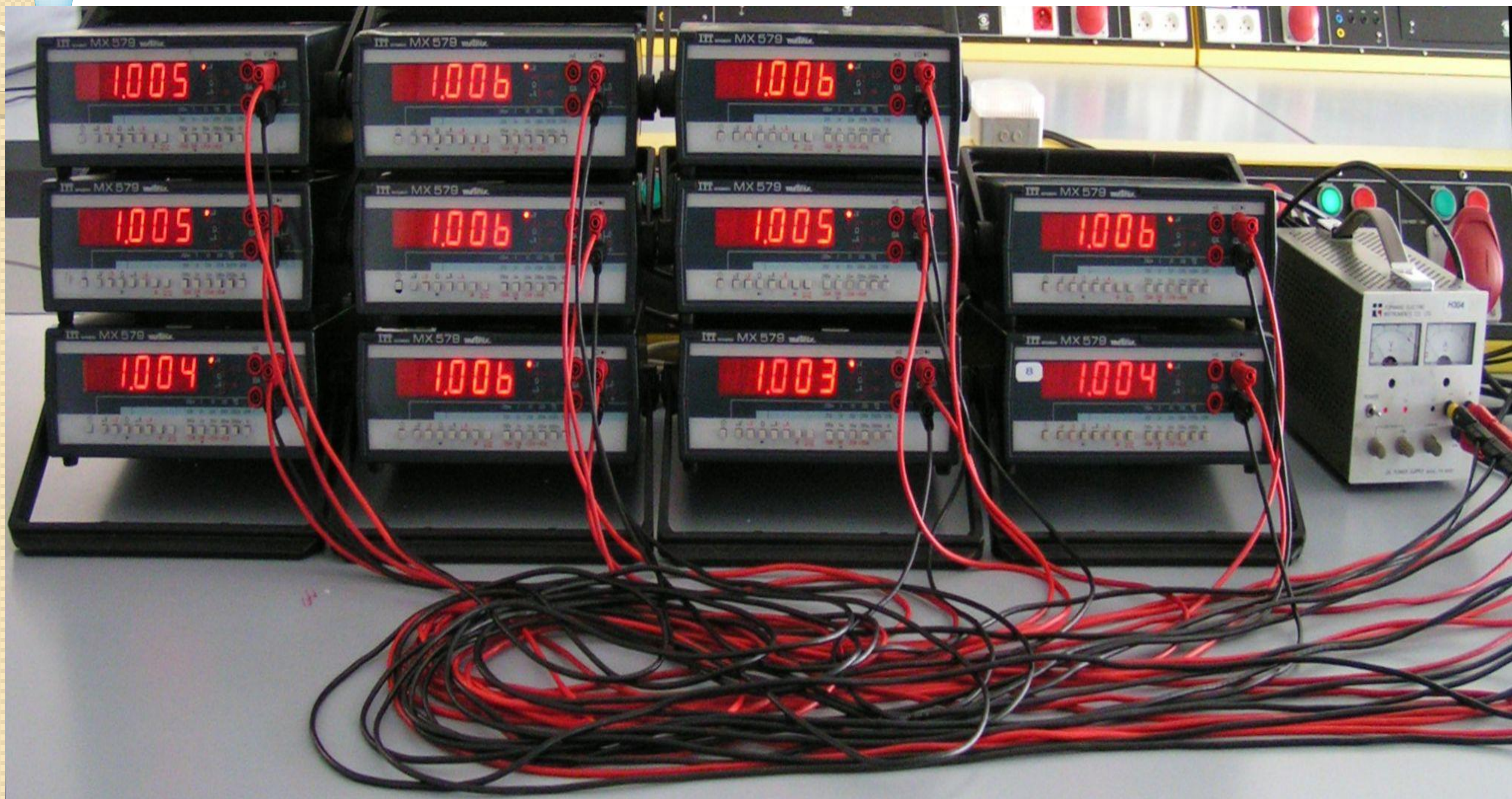
Comment fait-on « MAINTENANT » ?

Depuis environ 10 -15 ans, on a changé de paradigme.

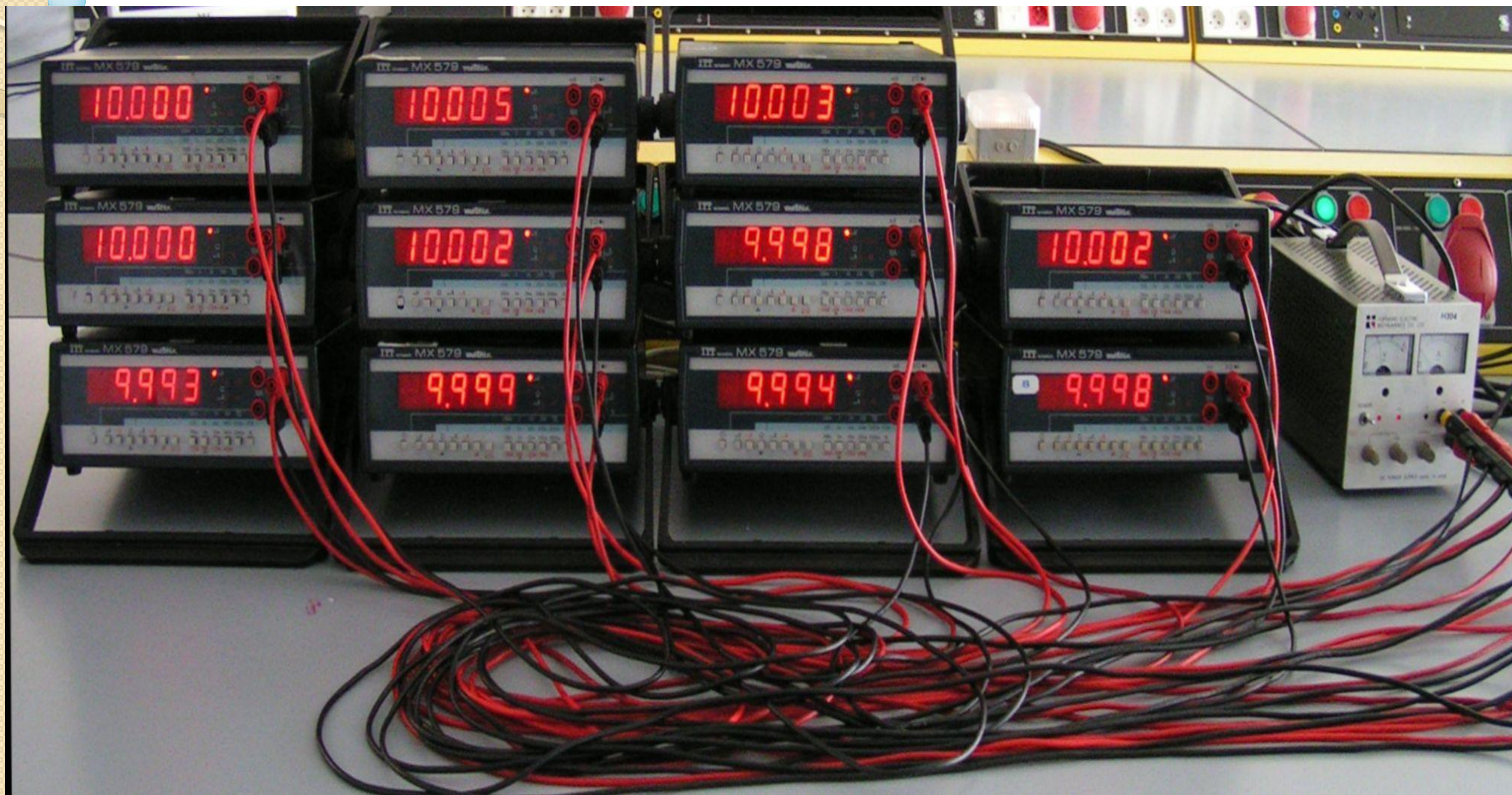
Une grandeur physique présente une **variabilité**.

Illustration…

Incertitudes sur les grandeurs physiques



Incertitudes sur les grandeurs physiques



Incertitudes sur les grandeurs physiques

Comment fait-on « MAINTENANT » ?

Une grandeur physique présente une **variabilité**.

- difficulté à définir une valeur vraie.
- le résultat d'une mesure est une réalisation d'une variable aléatoire.

Un mesurage s'apparente à un tirage aléatoire.
Les élèves réaliseront en SPC des expériences aléatoires comme ils en imagineront en mathématiques.

Incertitude : caractéristique de dispersion

comme l'écart-type en mathématiques

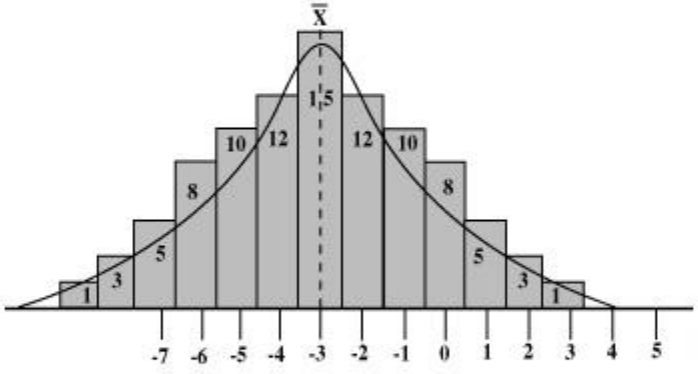
$\rightarrow$ on parle donc d'**incertitude-type**
$\rightarrow$ on utilise les lois des statistiques.

Incertitudes sur les grandeurs physiques

Comment fait-on « MAINTENANT » ?

L'incertitude type se calcule en tenant compte de la distribution de probabilité des résultats de mesure, connue ou supposée.

<u>Exemple</u> : (évaluation de type A)



Incertitudes sur les grandeurs physiques

Comment fait-on « MAINTENANT » ?

L'incertitude dépend de la distribution

L'incertitude type se calcule en tenant compte de la distribution de probabilité des résultats de mesure, connue ou supposée.

<u>Exemple :</u> (évaluation de type B)
Lecture d'un voltmètre numérique. Le constructeur donne comme tolérance : « $\Delta = \pm 2\% + 1$ digit ».

Si l'on suppose une distribution rectangulaire, l'incertitude-type est donnée par :

$$u = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}$$

Si l'on suppose une distribution triangulaire, l'incertitude-type est donnée par :

$$u = \frac{\Delta}{\sqrt{6}}$$

Evaluation des incertitudes sur les grandeurs physiques

Plan :

- ❑ **Comment faisait-on avant ?**
- ❑ **Comment fait-on maintenant ?**
  - **la démarche**
  - **étapes essentielles de la méthode**

Document destiné à l’usage des professeurs

Incertitudes sur les grandeurs physiques

Comment fait-on « MAINTENANT » ?

Dans les normes actuelles, deux méthodes d'évaluation sont proposées :

- On peut effectuer un grand nombre de mesures répétées → évaluation de type A : on utilise explicitement des méthodes statistiques pour traiter l'échantillon de mesures. L'idée est que l'augmentation du nombre de mesures améliore la connaissance du résultat du mesurage.

- On choisit de ne pas répéter les mesures (temps, coût, méthode destructive…) → évaluation de type B : sans mesures répétées, on utilise toute information utile relative à la variabilité de la grandeur (notice de l'appareil, incertitudes tabulées, rapports d'études techniques…). On utilise implicitement les mathématiques statistiques à travers un modèle choisi pour la distribution de probabilité (rectangulaire, triangulaire…).

ETAPE 1 : calcul de l'incertitude - type

évaluation de type A

•Le meilleur estimateur de la valeur mesurée est la moyenne de l'échantillon de *n* mesures.

•L'incertitude-type est l'écart-type sur cette moyenne :

$$u = \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}}$$

Elle est toujours plus faible que celle sur une mesure unique.

évaluation de type B

• à partir d'une notice d'appareil :

par exemple « précision ±2% + 2digits »

valeur affichée 0.051 → u = (0,051*2/100 + 2*0,001)/√3

• à partir d'incertitudes trouvées dans des tables :

par exemple « selon l'UIPAC, M(C)=12,0107 ± 0,0008 uma »

0,0008 est l'incertitude indiquée (ou tabulée)

l'incertitude-type se calcule par 0,0008uma / √3 = 0,00046 uma

en supposant une distribution rectangulaire

ETAPE 2 :

Propagation des incertitudes types lors d'un calcul

Lors d'un calcul avec des grandeurs *statistiquement indépendantes*, il faut combiner les incertitudes-type pour obtenir l'incertitude-type sur le résultat du calcul :

Si $y = a \pm b$ alors $u(y) = \sqrt{u^2(a) + u^2(b)}$

Si $y = a / b$ ou $y = a*b$ alors $\dfrac{u(y)}{|y|} = \sqrt{\left(\dfrac{u(a)}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{u(b)}{b}\right)^2}$

Si $y = k\,a^n$, avec k et n parfaitement connus alors

$$\frac{u(y)}{|y|} = n\,\frac{u(a)}{|a|}$$

Attention, ne pas chercher à démontrer cette relation avec la précédente !
$a^2 = a * a$ mais a et a ne sont pas des variables indépendantes

ETAPE 2 :

Propagation des incertitudes lors d'un calcul

Lors d'un calcul avec des grandeurs *statistiquement indépendantes*, il faut combiner les incertitudes type pour obtenir l'incertitude type sur le résultat du calcul :

Cas général :

si $y = f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ alors

$$u(y) = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 u^2(x_1) + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 u^2(x_2) + \ldots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_n}\right)^2 u^2(x_n)}$$

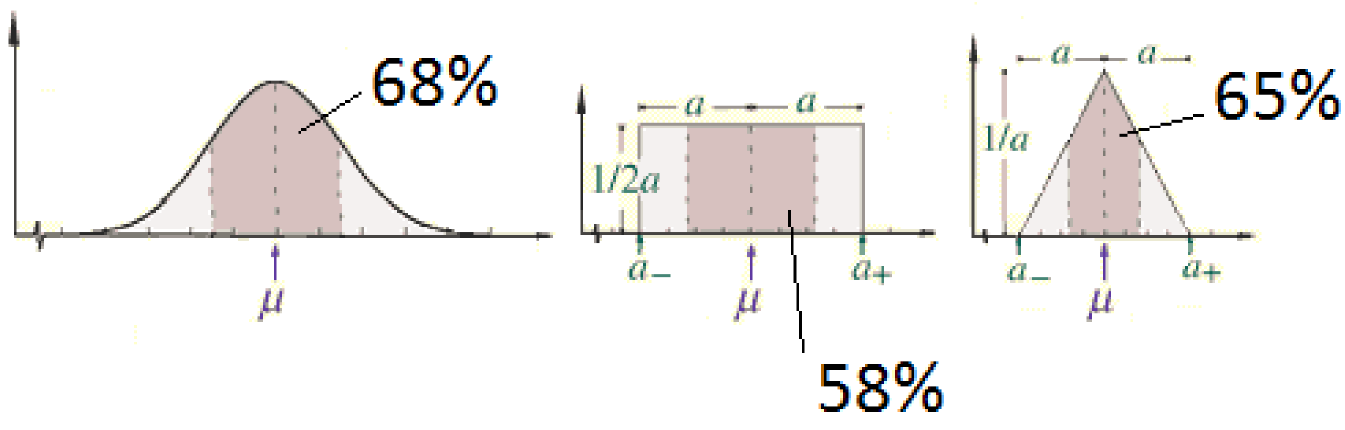
Cette relation permet la démonstration des formules usuelles précédentes.

ETAPE 3 :
calculer l’incertitude finale sur le mesurande et lui donner un sens

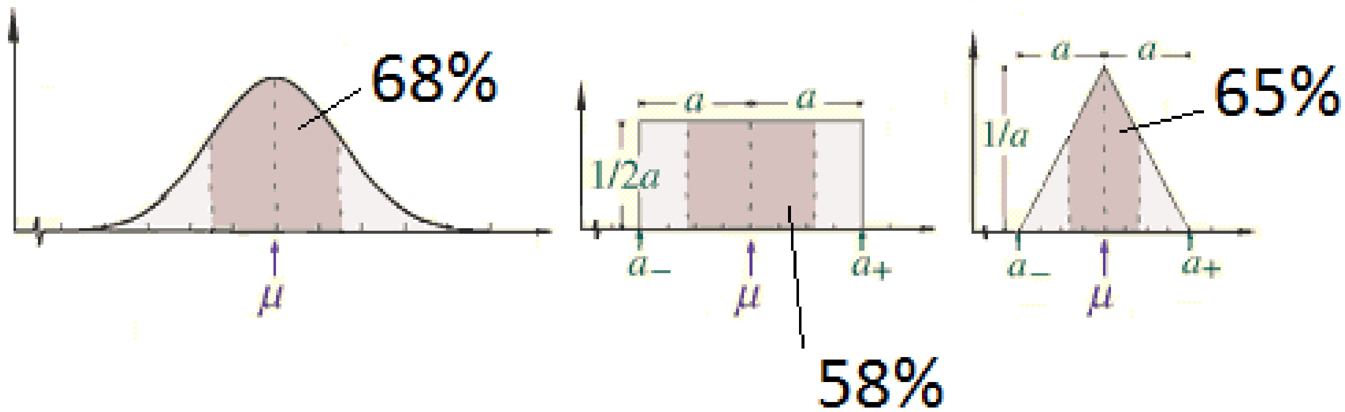
Quel est le sens de l’incertitude type calculée jusqu’ici ?

Il se situe dans la **forme de la distribution** des résultats :

distribution obtenue (type A) *ou* distribution supposée (type B)



ETAPE 3 :
calculer l'incertitude finale sur le mesurande et lui donner un sens



- La zone grisée représente la fraction de l'aire sous la courbe située à ± 1 écart-type autour de la moyenne µ.

- C'est aussi la probabilité que la « valeur vraie » soit située dans le domaine grisé.

- Les valeurs *68%, 58%, 65%* montrent qu'un intervalle de demi-largeur *u* donne une probabilité de présence très restreinte pour la « valeur vraie ».

- On se fixe une exigence de probabilité plus importante et on <u>élargit</u> l'intervalle pour atteindre cette nouvelle probabilité.

ETAPE 3 :
calculer l'incertitude élargie sur le mesurande et lui donner un sens

Concrètement, une fois qu'on a calculé l'incertitude type, on doit l'élargir en la multipliant par un coefficient.

On obtient l' « incertitude élargie » U(y) :

$$U(y) = k * u(y)$$ k est le coefficient d'élargissement

k est souvent pris égal à 2
Cela correspond à peu près à une probabilité de 0,95 que la valeur la plus exacte soit dans l'intervalle

$$[\ \bar{y} - U(y)\ ;\ \bar{y} + U(y)\ ]$$

On parle d'une évaluation avec un niveau de confiance de 95 %.

Lors d'une évaluation de type A, on prend souvent le coefficient de Student *k* correspondant au niveau de confiance choisi et au nombre de mesures faites. Au niveau 95% et pour 20 mesures, $k \cong 2,1$.

QUELQUES EXEMPLES

- Incertitude type sur une abscisse *x* lue avec une règle graduée au millimètre près :

$$u(x) = \frac{\frac{1}{2}mm}{\sqrt{3}} = \frac{1mm}{\sqrt{12}}$$

- Incertitude type sur une longueur calculée avec deux abscisses *L*= x_2 - x_1 *relevées* avec une règle graduée au millimètre près :

$$u(L) = \sqrt{u^2(x_1) + u^2(x_2)} = \sqrt{\left(\frac{\frac{1}{2}mm}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{\frac{1}{2}mm}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{2}\ \frac{\frac{1}{2}mm}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}\,\frac{1mm}{\sqrt{12}}$$

- Incertitude type sur la lecture d'une chute de burette.

L'étalonnage de la burette a une tolérance indiquée « ±0,03mL ».

$$u(V) = \frac{0{,}03mL}{\sqrt{3}} \quad \text{ou} \quad u(V) = \frac{0{,}03mL}{\sqrt{6}}$$

dans les exemples précédents…

- A chaque division par $\sqrt{3}$, on a supposé une distribution de probabilité rectangulaire.
C'est ce qu'il faut faire quand l'on n'a aucune information sur la distribution ou aucune raison de faire autrement.

- Il ne faut pas oublier d'élargir ensuite *u* avec un facteur d'élargissement k pour avoir l'incertitude élargie (finale) *U*.
Ceci nécessite de se fixer auparavant un niveau de confiance.

Bibliographie :

- Nombre, mesures et incertitudes. IGEN. Mai 2010
- Mesures et incertitudes. IGEN. Mai 2012.
- Guide Eurachem 3ème édition. Particulièrement le chapitre 8.
- Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure (GUM) BIPM
- Mesure et instrumentation – 1^{e} STL – Ed. Casteilla
- Mesure physique et instrumentation – D.Barchiesi – Ed. Ellipses
- Le « BUP » (bulletin de l'UDPPC)