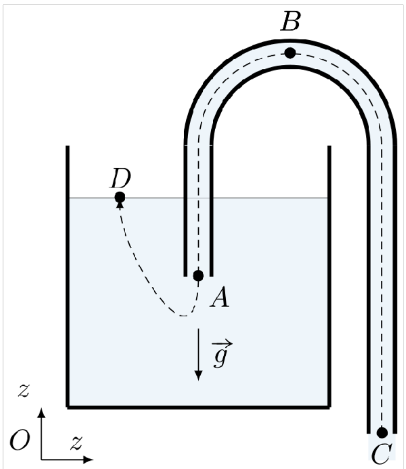
F3 - Utilisation d'un siphon

On se propose de vider partiellement un réservoir parallélépipédique contenant un liquide de masse volumique uniforme μ_0 au moyen d'un siphon, c'est à dire d'un tube coudé de section constante s. On note S la section du réservoir.
Soient A le point d'entrée du siphon, B le point le plus haut du siphon, C la sortie du siphon et D un point de la surface libre dans le réservoir. On note z_A, z_B, z_C et z_D les coordonnées correspondantes.
La surface libre du réservoir et l'extrémité C du siphon sont à la pression atmosphérique notée p_{atm}.

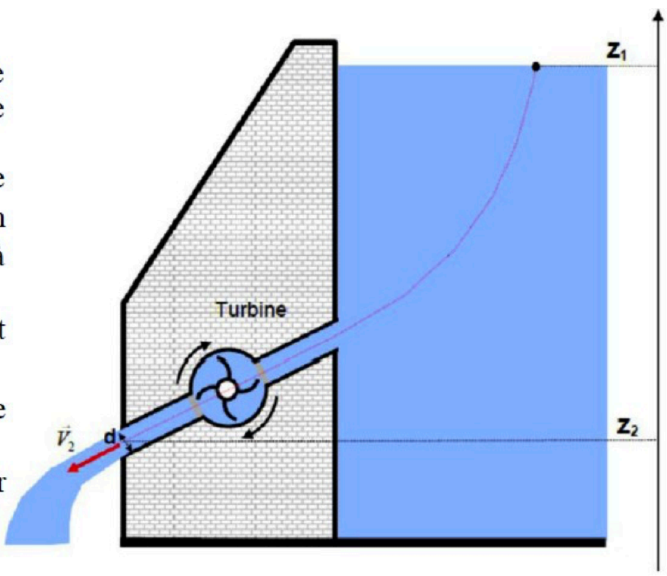


1. Considérant que $s \ll S$, que peut-on dire de la vitesse au point C ?
2. Exprimer la vitesse du fluide à la sortie du siphon. En déduire une condition pour que le fluide s'écoule.
3. Exprimer les pressions p_A et p_B dans le fluide aux points A et B ? Que faut-il faire pour amorcer le siphon ? La hauteur du point B peut-elle être quelconque ?
4. Étudier les variations de z_D en fonction du temps.

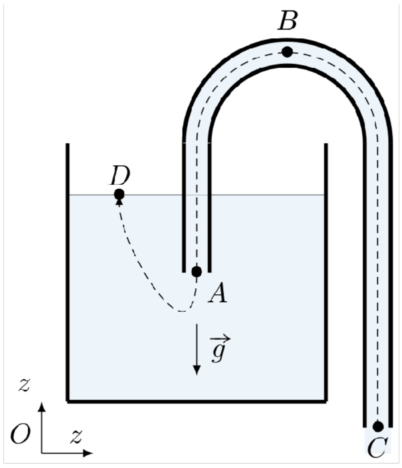
F3 - Centrale hydraulique

On considère un barrage afin de réaliser une centrale hydraulique. Cette dernière est équipée d'une turbine entraînée par un jet d'eau sous pression.
La conduite de sortie, de diamètre $d=2{,}5\,m$, est située à une altitude $z_2=5\,m$. Le débit volumique $Q_v=25\,m^3/s$. On suppose que le niveau d'eau dans le barrage, situé à $z_1=30\,m$, est constant.
Les pertes de charges régulières dans la conduite sont évaluées à $\Delta P_{reg}=32{,}75.10^3\,Pa$.

1. Calculer la vitesse v_2 d'écoulement d'eau à la sortie de la canalisation.
2. Déterminer la puissance P_a reçue par l'arbre moteur de la turbine.



F3 - Utilisation d'un siphon



On se propose de vider partiellement un réservoir parallélépipédique contenant un liquide de masse volumique uniforme μ_0 au moyen d'un siphon, c'est à dire d'un tube coudé de section constante s. On note S la section du réservoir.
Soient A le point d'entrée du siphon, B le point le plus haut du siphon, C la sortie du siphon et D un point de la surface libre dans le réservoir. On note z_A, z_B, z_C et z_D les coordonnées correspondantes.
La surface libre du réservoir et l'extrémité C du siphon sont à la pression atmosphérique notée p_{atm}.

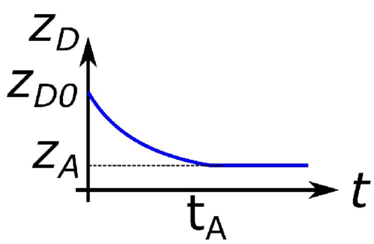
1. Considérant que $s \ll S$, que peut-on dire de la vitesse au point C ?
   Par conservation du débit volumique pour un fluide incompressible $sv_C = Sv_D$ soit $v_C = \dfrac{S}{s} v_D \Rightarrow \boxed{v_C \gg v_D}$

2. Exprimer la vitesse du fluide à la sortie du siphon. En déduire une condition pour que le fluide s'écoule.
   Dans le référentiel terrestre supposé galiléen dont l'axe (Oz) est vertical ascendant, en supposant de plus l'écoulement parfait, stationnaire, homogène et incompressible et l'action de la pesanteur uniforme, la relation de Bernoulli entre les points D et C s'écrit :
   $\dfrac{p_{atm}}{\mu_0} + \dfrac{1}{2}v_D^2 + gz_D = \dfrac{p_{atm}}{\mu_0} + \dfrac{1}{2}v_C^2 + gz_C$ avec $v_C \gg v_D$
   La relation de Bernoulli devient alors $g(z_D - z_C) = \dfrac{1}{2}v_C^2 \Rightarrow \boxed{v_C = \sqrt{2g(z_D - z_C)}}$: écoulement si $z_D > z_C$ (sinon racine d'un nombre négatif).

3. Exprimer les pressions p_A et p_B dans le fluide aux points A et B ? Que faut-il faire pour amorcer le siphon ? La hauteur du point B peut-elle être quelconque ?
   La relation de Bernoulli entre A et C s'écrit : $\dfrac{p_A}{\mu_0} + \dfrac{1}{2}v_A^2 + gz_A = \dfrac{p_{atm}}{\mu_0} + \dfrac{1}{2}v_C^2 + gz_C$ avec $v_C = v_A$ par conservation du débit dans le tube de section constante
   $\Rightarrow \boxed{p_A = p_{atm} - g(z_A - z_C)}$
   De même $\boxed{p_B = p_{atm} - g(z_B - z_C)}$: il fat $p_B > 0$ sinon il y a vaporisation de l'eau donc cavitation et désamorçage du siphon $\Rightarrow$ il faut que $p_{atm} - g(z_B - z_C) > 0$ donc $\boxed{z_B - z_C < \dfrac{p_{atm}}{g}}$
   Pour amorcer le Siphon, il faut remplir le tube (par exemple en aspirant l'eau par C ou en le plongeant dans le réservoir puis en bouchant l'extrémité C avant de le placer puis de relâcher C.

4. Étudier les variations de z_D en fonction du temps.
   Comme à l'exercice précédent, $v_D = -\dfrac{\mathrm{d}z_D}{\mathrm{d}t}$ et $v_C = \sqrt{2g(z_D - z_C)}$
   La conservation du débit volumique donne $\Rightarrow -\dfrac{\mathrm{d}z_D}{\mathrm{d}t}S = s\sqrt{2g(z_D(t) - z_C)} \Rightarrow$ en séparant les variables
   $-\dfrac{\mathrm{d}z_D}{\sqrt{z_D - z_C}}S = s\sqrt{2g}\mathrm{d}t \Rightarrow -S\int_{z_{D0}}^{z_D(t)} \dfrac{\mathrm{d}z_D}{\sqrt{z_D - z_C}} = s\sqrt{2g}\int_0^t \mathrm{d}t_A$
   $\Rightarrow -S[2\sqrt{z_D - z_C}]_{z_{D0}}^{z_D(t)} = s\sqrt{2g}t \Rightarrow -S(2\sqrt{z_D(t) - z_C} - 2\sqrt{z_{D0} - z_C}) = s\sqrt{2g}t$
   $\Rightarrow \sqrt{z_D(t) - z_C} = -\dfrac{s\sqrt{2g}}{2S}t + \sqrt{z_{D0} - z_C}$

   $\Rightarrow \boxed{z_D(t) = z_C + \left(-\dfrac{s\sqrt{2g}}{2S}t + \sqrt{z_{D0} - z_C}\right)^2}$ jusqu'à t_A tel que $z_D(t_A) =$ z_A alors le siphon se désamorce et z_D reste constant égal à z_A.



F3 - Centrale hydraulique

1. Par définition $Q_v = v_2 S = v_2 \frac{\pi d^2}{4} \Rightarrow \boxed{v_2 = \frac{4Q_v}{\pi d^2}}$

A.N. : $v_2 = \frac{4 \times 25}{3,14 \times 2,5^2} = \frac{40}{3,14 \times 2,5} = \frac{16}{3,14} \underline{\approx 5,1 \text{ m.s}^{-1}}$

2. La relation de Bernoulli entre un point à la surface de l'eau (d'altitude z_1, de vitesse nulle, et à pression atmosphérique) et un point à la sortie de la turbine (d'altitude z_2, de vitesse v_2 et à pression atmosphérique) s'écrit, en tenant compte des pertes de charges et du travail massique w_i reçu par l'eau à travers la tubine :

$$\frac{P_0}{\rho} + \frac{1}{2}v_2^2 + gz_2 = \frac{P_0}{\rho} + 0 + gz_1 - \frac{\Delta P_{reg}}{\rho} + w_i$$

$\Rightarrow \frac{1}{2}v_2^2 + gz_2 = gz_1 - \frac{\Delta P_{reg}}{\rho} + w_i$

$\Rightarrow w_i = \frac{1}{2}v_2^2 + g(z_2 - z_1) + \frac{\Delta P_{reg}}{\rho}$

Or $\mathcal{P}_a = -Q_m w_i = -\rho Q_v w_i$ ("-" car il s'agit de la puissance fournie à la turbine qui est l'opposé de la puissance reçue par l'eau)

$\Rightarrow \boxed{\mathcal{P}_a = -Q_v \left(\frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g(z_2 - z_1) + \Delta P_{reg}\right)}$

A.N. : $\mathcal{P}_a = -25 \times \left(\frac{1}{2}10^3 \times 5,1^2 + 10^3 \times 10(5-30) + 32,75.10^3\right)$

$\Rightarrow \mathcal{P}_a = -25 \times (13.10^3 - 25.10^4 + 32,75.10^3) = 25 \times 20.10^4 \underline{= 5.10^6 \text{ W} = 5 \text{ MW}}$