Résolution de problème 2 2

Une baignoire se remplit en 8 min, robinet ouvert et bonde fermée, et se vide en 12 min, robinet fermé et bonde ouverte.

La baignoire déborde-t-elle si on ouvre à la fois le robinet et la bonde ?

Questions ouvertes 2 0

1. Une voiture roule les deux vitres latérales avant baissées et il n'y a pas de vent. Dans un virage, le conducteur sent nettement un courant d'air d'une des fenêtres à l'autre et qui disparaît lorsque la voiture reprend sa route en ligne droite. Expliquer.
2. Pourquoi les voitures de courses ont-elles un centre de masse bas ?

Relation de Bernoulli pour un écoulement parfait

Ex.1 : Tube de Pitot 2 1

Les tubes de Pitot sont des capteurs de vitesse basés sur une mesure de différentiel de pression. Le dispositif est représenté en figures ci-dessous.

Sur le schéma de droite, on note la présence de deux orifices permettant de mesurer une première pression, notée p_{tot} pour pression totale, et une seconde, notée p_{stat} pour pression statique. Les deux orifices communiquent via un manomètre différentiel à mercure. La différence de pression entre les deux orifices se déduit de la hauteur ΔH.

On note μ_{Hg} la masse volumique du mercure, μ_0 celle de l'air, p_0 la pression atmosphérique et V_∞ la vitesse relative du vent aérodynamique.

Tube de Pitot monté sur une aile d'avion

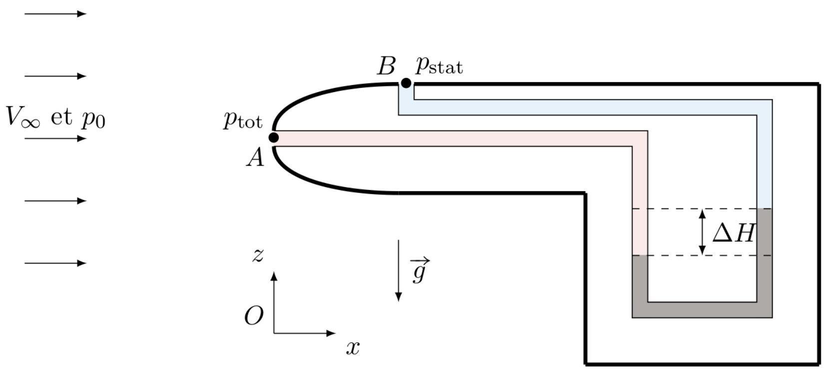
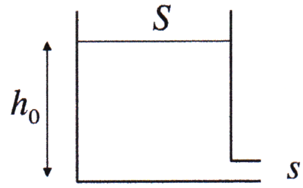


Schéma de fonctionnement

1. Etablir un lien entre p_{tot}, p_{stat}, μ_{Hg} et ΔH.
2. En supposant une symétrie parfaite des lignes de courant autour du nez du tube de Pitot, il existe une ligne de courant amenant au point A appelé « point d'arrêt » où la vitesse du fluide est nulle. En déduire une expression de p_{tot} en fonction de p_0, μ_0 et V_∞.
3. En traçant la ligne de courant passant par B, en déduire une expression de p_{stat}.
4. En déduire que : $$V_\infty = \sqrt{\frac{2\mu_{Hg} g \Delta H}{\mu_0}}$$

Ex.2 : Vidange d'un réservoir

Le liquide considéré est un fluide parfait supposé incompressible.
La section de l'ouverture de vidange s est petite devant la surface libre S du liquide.



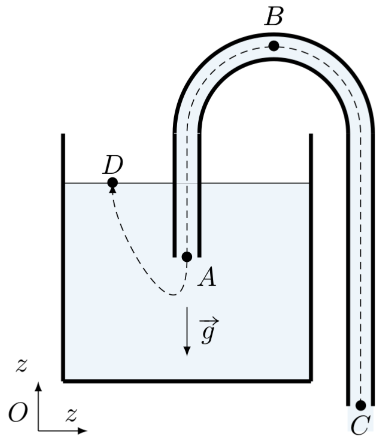
1. Montrer que cela permet de trouver simplement la vitesse d'éjection v_0 en fonction de h_0.
   A.N. : calculer v_0 pour $h_0 = 1$ m.
2. Sous quelle hypothèse peut-on estimer le temps de vidange τ du réservoir ?
   A.N. : exprimer puis calculer τ pour $h_0 = 1$ m, $S = 0,5$ m² et $s = 1,5$ cm².

Ex.3 : Utilisation d'un siphon

On se propose de vider partiellement un réservoir parallélépipédique contenant un liquide de masse volumique uniforme μ_0 au moyen d'un siphon, c'est à dire d'un tube coudé de section constante s. On note S la section du réservoir.

Soient A le point d'entrée du siphon, B le point le plus haut du siphon, C la sortie du siphon et D un point de la surface libre dans le réservoir. On note z_A, z_B, z_C et z_D les coordonnées correspondantes.

La surface libre du réservoir et l'extrémité C du siphon sont à la pression atmosphérique notée p_{atm}.

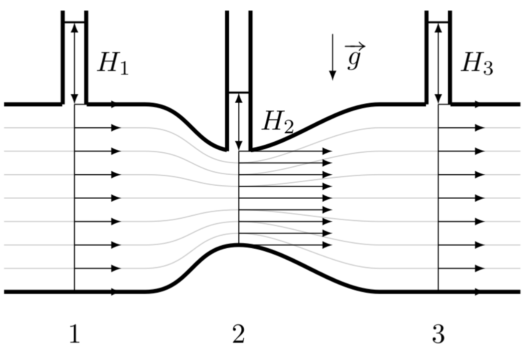


1. Considérant que $s \ll S$, que peut-on dire de la vitesse au point C ?
2. Exprimer la vitesse du fluide à la sortie du siphon. En déduire une condition pour que le fluide s'écoule.
3. Exprimer les pressions p_A et p_B dans le fluide aux points A et B ? Que faut-il faire pour amorcer le siphon ? La hauteur du point B peut-elle être quelconque ?
4. Étudier les variations de z_D en fonction du temps.

Appli.1 : Mesure de débit par effet Venturi

Soit une conduite horizontale de section S variable, alimentée en fluide incompressible de masse volumique $\mu = \mu_0$ par un débit volumique D_v. On suppose que le profil de vitesse dans toute section perpendiculaire à l'axe de la conduite est uniforme, de sorte que la pression est également uniforme sur chaque section.

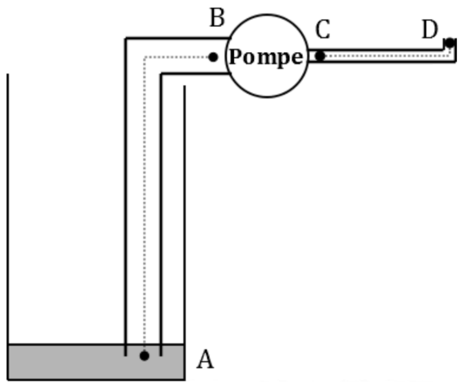
La conduite a la forme ci-dessous :



1. Exprimer la relation entre les vitesses v_1 et v_2 et les sections S_1 et S_2. Conclure sur l'évolution de la vitesse dans le rétrécissement. Est-ce cohérent avec les lignes de courant tracées ?
2. Établir l'expression de la pression p_i qui règne dans la section i en fonction de p_0, μ_0, g et H_i.
3. On note $\Delta H = H_1 - H_2$, relier la pression p_1 à p_2, ΔH, μ_0 et g.
4. Établir une première expression de v_2 en fonction de v_1 et de ΔH et g.
5. En déduire une expression du débit D_v en fonction, entre autres, du ratio $\frac{S_1}{S_2}$.

Ecoulement d'un fluide parfait avec partie mobile

Appli.2 : Pompe 2 1



Soit un bloc pompe qui puise de l'eau au fond d'un puits de profondeur $AB = 5$ m.

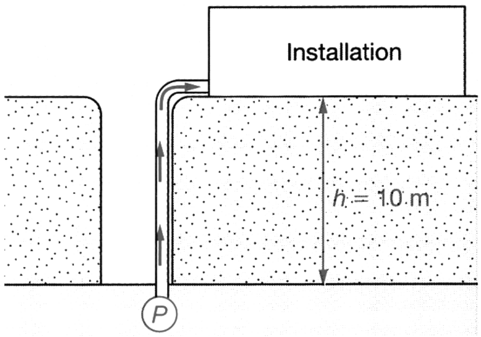
- La section AB fait 100 cm² et celle de CD fait 10 cm².
- La pression atmosphérique est de 1000 hPa, la pression de vapeur saturante de l'eau est de $2,3$ kPa (à 20°C).
- Le débit volumique est $D_v = 10$ L.s⁻¹.

E est le point le plus haut atteint par le jet d'eau.

1. Quelles hypothèses peut-on faire sur le fluide, sur l'écoulement ?
2. Quelle est la vitesse du fluide en A ?
3. Que vaut la pression en B ? Y a-t-il risque de cavitation ? (La cavitation correspond à la formation de bulles de vapeur dans un liquide soumis localement à une baisse de pression).
4. Quelle puissance actionne la pompe ?
5. Quelle altitude maximale pourra atteindre le jet d'eau ?

Ex.4 : Ordre de grandeur d'une puissance indiquée 1 1

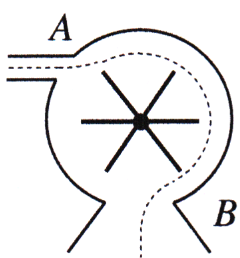
Une pompe immergée 10 mètres sous terre doit permettre de remonter de l'eau dans une installation située à la surface. La pression du liquide au niveau du captage est voisine de la pression atmosphérique et on désire disposer d'un débit égal à 7 m³.h⁻¹ avec, dans l'installation, une pression supérieure à la pression atmosphérique de $2,5$ bar. Les sections des conduites sont identiques et on se place en régime stationnaire.



On se livre ici à une estimation grossière visant à dégager un ordre de grandeur de la puissance indiquée Ψ_i : toutes les causes de perte sont donc ignorées.

1. Estimer le travail indiqué massique nécessaire.
2. En déduire une estimation de la puissance indiquée.
3. Comparer à la puissance de fonctionnement d'un ustensile ménager courant.

Ex.5 : Puissance fournie à une turbine 2 1



De l'eau circule dans une turbine de A vers B ; les diamètres d'entrée et de sortie sont $\Phi_A = 30$ cm et $\Phi_B = 60$ cm. Le débit volumique est $D_V = 0,22$ m³.s⁻¹ et la dénivellation est $z_A - z_B = 1$ m. Les pressions du liquide en A et B par rapport à la pression atmosphérique sont $\Delta P_A = 1,5$ kg.cm⁻² et $\Delta P_B = -0,35$ kg.cm⁻².

L'eau est ici un fluide incompressible de masse volumique $\rho = 1$ g.cm⁻³.

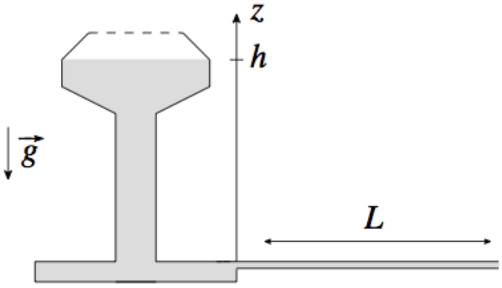
Evaluer numériquement chacun des trois termes qui contribuent à la puissance fournie par l'eau à la turbine et commenter.

Fluide et écoulement visqueux

Ex.6 : Distribution d'eau potable — 2 — 2

Un château d'eau de hauteur $h = 25$ m, alimente un village en eau potable. On rappelle que l'eau a une masse volumique $\mu_0 = 1,0.10^3$ kg.m⁻³ et une viscosité dynamique $\eta = 1,0.10^{-3}$ Pl.

Une canalisation de longueur $L = 100$ m et de section $S = 1$ cm² part du pied de ce château d'eau. L'autre extrémité est à l'air libre.



Le fluide s'écoule sous l'effet de la différence de pression qui existe entre l'entrée et la sortie de cette canalisation. Dans le cas d'un écoulement laminaire, il s'agit d'un écoulement de Poiseuille cylindrique pour lequel la vitesse vaut $\vec{v}(M) = \dfrac{(P_e - P_s)(R^2 - r^2)}{4\eta L}\vec{u}_z$ où P_s est la pression de sortie.

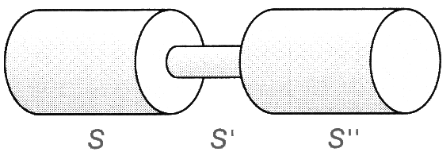
On rappelle l'expression du nombre de Reynolds : $R_e = \dfrac{vD\mu}{\eta}$ avec v vitesse caractéristique de l'écoulement, D distance typique transversale, μ masse volumique en kg.m⁻³, et η viscosité dynamique du fluide.

1. Quel est l'ordre de grandeur de la pression P_e qui peut être attendue au pied du château d'eau, en admettant que le débit d'eau dans la canalisation soit suffisamment faible pour ne pas perturber la pression ?
2. Quel débit peut on attendre en sortie de la canalisation, en supposant a priori l'écoulement laminaire ? Calculer la vitesse débitante U .
3. Calculer le nombre de Reynolds pour cet écoulement, et conclure.
4. Dans certaines maisons anciennes, les débits de sortie ne sont pas suffisants, on dit qu'on manque de pression. Qu'est-il préférable de faire pour obtenir un débit plus important ?

Ex.7 : Règle de la plus faible section — 2 — 1

Lorsqu'une installation complexe comporte plusieurs tronçons de conduites mis en série, on a coutume de considérer la perte de charge dominante comme celle donnée par la portion de plus faible section.

On rappelle l'expression du nombre de Reynolds $R_e = \dfrac{vd\mu}{\eta}$.



Commenter cette affirmation en utilisant la loi de Poiseuille qui donne la perte de charge pour un écoulement à faible nombre de Reynolds ($R_e < 2000$) :

$$\Delta P_C = \frac{64}{R_e}\frac{\ell}{d}\mu\frac{v^2}{2}$$

Appli.3 : Pertes de charge et puissance d'une pompe — 1 — 1

Dans une conduite horizontale d'une longueur de 525 m où circule un fluide de masse volumique 900 kg.m⁻³ avec un débit de 80 m³.h⁻¹, les frottements font perdre au fluide l'équivalent en pression de 3 cm de fluide pour une longueur de 2 m de canalisation.

1. Quel est le type de perte de charge ?
2. Calculer en Pa cette perte de charge pour un mètre de canalisation.
3. Quelle serait la puissance utile d'une pompe qui compenserait cette perte de charge pour 1 mètre de canalisation ?
4. Quelle serait la puissance minimale de la pompe qui permettrait de faire circuler le liquide sur la longueur de 525 m ?

Appli.4 : Écritures du théorème de Bernoulli 1 0

Parmi les écritures ci-dessous du théorème de Bernoulli, indiquer lesquelles sont correctes, lesquelles sont fausses, et pourquoi. Pour chaque écriture correcte, préciser la dimension des termes intervenant.
On note les pertes de charge $\Delta P > 0$ (homogène à une pression) ou $\Delta h > 0$ (homogène à une hauteur).

1) $\dfrac{P}{\rho} + \dfrac{1}{2}v^2 + gz = cste$ **2)** $D_v\left(P_s + \dfrac{1}{2}\rho v_s^2 + \rho g z_s\right) - D_v\left(P_e + \dfrac{1}{2}\rho v_e^2 + \rho g z_e\right) = \mathcal{P}_i - D_v\Delta P$

3) $\dfrac{P}{\rho g} + \dfrac{1}{2g}v^2 + z = cste$ **4)** $\left(\dfrac{P_s}{\rho} + \dfrac{1}{2}v_s^2 + gz_s\right) - \left(\dfrac{P_e}{\rho} + \dfrac{1}{2}v_e^2 + gz_e\right) = -\Delta P$

5) $P + \dfrac{1}{2}\rho v^2 + gz = cste$ **6)** $\left(P_s + \dfrac{1}{2}\rho v_s^2 + \rho g z_s\right) - \left(P_e + \dfrac{1}{2}\rho v_e^2 + \rho g z_e\right) = \rho w_i$

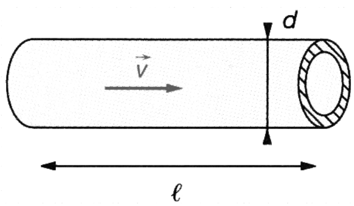
7) $D_m\left(\dfrac{P_s}{\rho} + \dfrac{1}{2}v_s^2 + gz_s\right) - D_m\left(\dfrac{P_e}{\rho} + \dfrac{1}{2}v_e^2 + gz_e\right) = D_m g\Delta h$

8) $\left(\dfrac{P_s}{\rho} + \dfrac{1}{2}v_s^2 + gz_s\right) - \left(\dfrac{P_e}{\rho} + \dfrac{1}{2}v_e^2 + gz_e\right) = -g\Delta h$ **9)** $\left(\dfrac{P_s}{\rho} + \dfrac{1}{2}v_s^2 + z_s\right) - \left(\dfrac{P_e}{\rho} + \dfrac{1}{2}v_e^2 + z_e\right) = w_i$

10) $D_m\left(\dfrac{P_s}{\rho} + \dfrac{1}{2}v_s^2 + gz_s\right) - D_m\left(\dfrac{P_e}{\rho} + \dfrac{1}{2}v_e^2 + gz_e\right) = w_i$

Ex.8 : Calcul d'une perte de charge régulière 1 1

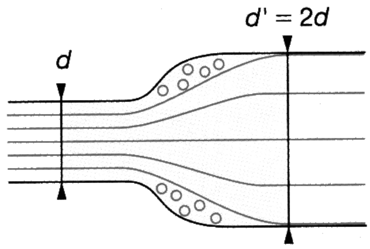
On s'intéresse à un écoulement d'eau liquide dans une conduite de diamètre $d = 32$ mm avec un débit volumique constant $D_V = 5$ m³.h⁻¹



On énonce généralement une règle d'usage simple, dans ce cas particulier : "la perte de charge correspond à $0,1$ mètre par unité de longueur de canalisation". On désire confronter cette règle de calcul très simple à ce que l'utilisation d'une loi plus élaborée permet de prévoir.

1. Déterminer la vitesse moyenne de l'écoulement et en déduire son nombre de Reynolds défini par $R_e = \dfrac{vd\mu}{\eta}$, avec $\mu = 10^3$ kg.m⁻³ et $\eta = 10^{-3}$ Pl.
2. Pour des écoulements dont le nombre de Reynolds est compris entre 2000 et 10^5, la perte de charge peut être calculée par la formule de Blasius :
$$\Delta P_C = 0,316\, R_e^{-0,25}\frac{\ell}{d}\mu\frac{v^2}{2}$$
où ℓ est la longueur de canalisation.
Déterminer la perte de charge par unité de longueur de canalisation $\dfrac{\Delta P_C}{\ell}$ dans le cas envisagé et vérifier l'ordre de grandeur proposé par la règle simple : $\dfrac{\Delta z_C}{\ell} = 0,1$.
3. La règle d'usage convient-elle pour un débit allant de 2 m³.h⁻¹ à 7 m³.h⁻¹ ?

Ex.9 : Perte de charge dans un élargissement

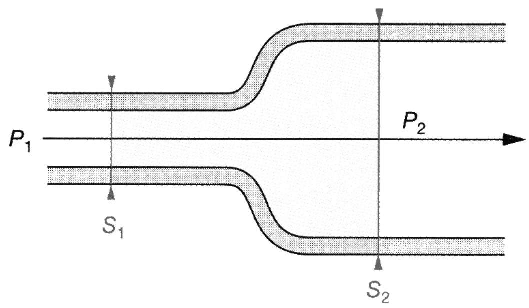


Une conduite cylindrique parcourue par un écoulement incompressible et stationnaire présente un changement de section. Le diamètre aval est le double du diamètre amont : $d' = 2d$. On ne prend pas en compte les effets de pesanteur.

1. Lorsqu'on suppose le fluide parfait et les conditions d'application de la formule de Bernoulli réunies, déterminer la variation de pression $P - P'$ entre amont et aval, en fonction de l'énergie cinétique volumique du fluide en amont $e_{c,v} = \mu \dfrac{v^2}{2}$. Commenter le signe.
2. Une étude plus précise de l'écoulement met en évidence l'existence d'une zone morte (zone de fluide immobile) sur la partie latérale située juste derrière l'élargissement. On montre alors que la différence de pression entre l'amont et une section située en avalde cette zone s'écrit : $P - P' = \mu v'(v' - v)$ (théorème de Bélanger). En déduire, dans le cadre de l'application de cette relation, la nouvelle expression de la différence de pression $P - P'$ en fonction de $e_{c,v}$.
3. Quel est l'écart relatif entre les deux résultats ? Commenter.
4. Proposer une expression pour la perte de charge singulière ΔP_C, en fonction de $e_{c,v}$, dans le cas de l'élargissement de section envisagé ici. Commenter le signe du résultat.

Ex.10 : Perte de charge singulière

Une conduite cylindrique horizontale présente un évasement brutal : la section en aval étant supérieure à la section en amont : $S_2 > S_1$.
On admet la relation (formule de Bélanger) qui énonce que, pour un écoulement stationnaire d'un fluide incompressible, les pressions et vitesse en amont et en aval de la transition (indices respectifs 1 et 2) sont liées par :



$$P_1 - P_2 = \mu v_2 (v_2 - v_1)$$

1. Exprimer le rapport $\dfrac{P_1 - P_2}{e_{c,v}}$ entre ls différence de pression et l'énergie cinétique volumique en amont, en fonction du rapport des sections $x = \dfrac{S_1}{S_2}$.
   Représenter le graphe de la courbe $\dfrac{P_1 - P_2}{e_{c,v}} = f(x)$ et interpréter.
2. Définir la perte de charge singulière ΔP_C et l'exprimer en fonction de μ, v_1, v_2.
3. Commenter le signe de ΔP_C. Peut-elle s'annuler ?