Résolution de problème 2 2

Une baignoire se remplit en 8 min, robinet ouvert et bonde fermée, et se vide en 12 min, robinet fermé et bonde ouverte.

La baignoire déborde-t-elle si on ouvre à la fois le robinet et la bonde ?

Modèle : eau assimilé à fluide parfait incompressible; baignoire section S hauteur h

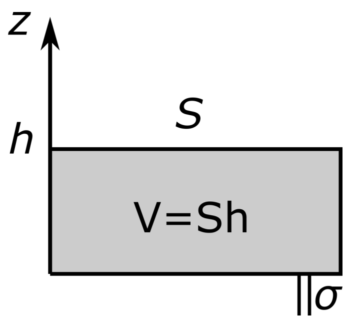
Robinet ouvert et bonde fermée $T_e = 8$ min : remplissage avec un débit volumique $D_e = \dfrac{V}{T_e}$ soit $\boxed{D_e = \dfrac{Sh}{T_e}}$

Robinet fermé et bonde ouverte $T_s = 12$ min : vidange avec un débit volumique variable $D_s(t)$ tel que $D_s(t) = -\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -S\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$

D'après Benoulli, $\dfrac{P_a}{\rho} + gz = \dfrac{P_a}{\rho} + \dfrac{1}{2}v_s^2$ soit $v_s = \sqrt{2gz} \Rightarrow D_s = \sigma\sqrt{2gz}$

D'où $-S\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \sigma\sqrt{2gz} \Rightarrow \int_h^0 S\dfrac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}} = \int_0^{T_s} \sigma\sqrt{2g}\mathrm{d}t \Rightarrow -2S\sqrt{h} = -\sigma\sqrt{2g}\,T_s$

$\Rightarrow \boxed{T_s = \dfrac{S}{\sigma}\sqrt{\dfrac{2h}{g}}}$



Si on ouvre à la fois le robinet et la bonde, il y a débordement si $D_s > D_e$ lorsque $z(t) = h$.

Or $\dfrac{D_s}{D_e} = \dfrac{\sigma}{S}T_e\sqrt{\dfrac{2g}{h}} = 4\dfrac{T_e}{T_s} = 4 \times \dfrac{8}{12} = \dfrac{8}{3} > 1$: la baignoire déborde

Questions ouvertes 2 0

1. Une voiture roule les deux vitres latérales avant baissées et il n'y a pas de vent. Dans un virage, le conducteur sent nettement un courant d'air d'une des fenêtres à l'autre et qui disparaît lorsque la voiture reprend sa route en ligne droite. Expliquer.
   Dans le cas d'un virage à gauche, la partie extérieure (côté passager) possède une vitesse plus grande que la partie intérieure. Or la voiture entraine l'air $\Rightarrow v_{ext} > v_{int} \Rightarrow P_{ext} < P_{int}$ d'après Bernoulli $\Rightarrow$ courant d'air du conducteur vers le passager.
2. Pourquoi les voitures de courses ont-elles un centre de masse bas ?
   Centre de masse bas $\Rightarrow$ l'air voit sa section disponible diminuer $\Rightarrow v \nearrow \Rightarrow P \searrow$ ce qui plaque la voiture au sol $\Rightarrow$ meilleure adhérence (surtout intéressant dans les virages).

Relation de Bernoulli pour un écoulement parfait

Ex.1 : Tube de Pitot 2 1

Les tubes de Pitot sont des capteurs de vitesse basés sur une mesure de différentiel de pression. Le dispositif est représenté en figures ci-dessous.

Sur le schéma de droite, on note la présence de deux orifices permettant de mesurer une première pression, notée p_{tot} pour pression totale, et une seconde, notée p_{stat} pour pression statique. Les deux orifices communiquent via un manomètre différentiel à mercure. La différence de pression entre les deux orifices se déduit de la hauteur ΔH.

On note μ_{Hg} la masse volumique du mercure, μ_0 celle de l'air, p_0 la pression atmosphérique et V_∞ la vitesse relative du vent aérodynamique.


Tube de Pitot monté sur une aile d'avion

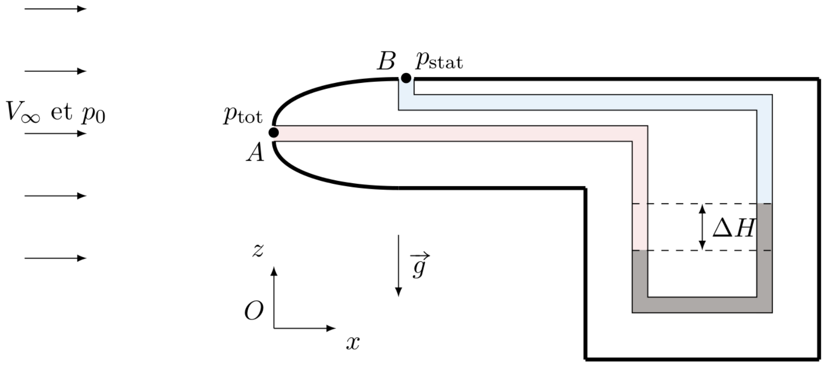


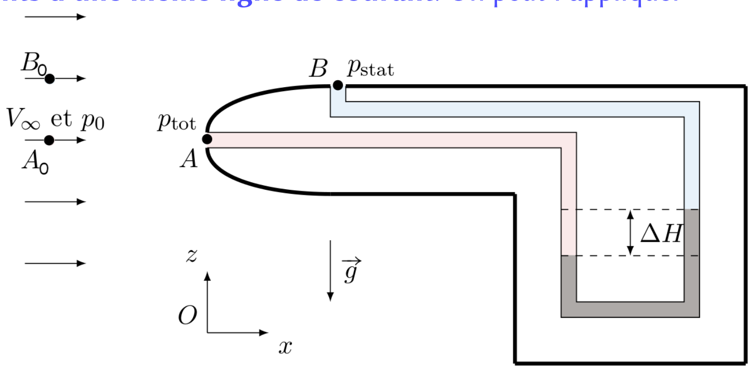
Schéma de fonctionnement

1. Etablir un lien entre p_{tot}, p_{stat}, μ_{Hg} et ΔH.
   La masse volumique de l'air étant négligeable par rapport à celle du mercure, les pressions aux interfaces air/mercure sont respectivement p_{tot} et p_{stat}.
   D'après la relation de la statique des fluides, on obtient $\boxed{p_{tot} = p_{stat} + \mu_{Hg}\, g \Delta H}$
2. En supposant une symétrie parfaite des lignes de courant autour du nez du tube de Pitot, il existe une ligne de courant amenant au point A appelé « point d'arrêt » où la vitesse du fluide est nulle. En déduire une expression de p_{tot} en fonction de p_0, μ_0 et V_∞.
   - L'air s'écoule dans le référentiel lié à l'avion en mouvement rectiligne uniforme par rapport au référentiel terrestre supposé galiléen. Le référentiel lié à l'avion est donc lui-même galiléen.
   - En choisissant un axe (Oz) vertical ascendant, en supposant le fluide homogène et incompressible et l'écoulement l'écoulement parfait et stationnaire,
   - dans le champ de pesanteur supposé uniforme,

   on applique la relation de Bernoulli **entre 2 points d'une même ligne de courant**. On peut l'appliquer :

   Entre A_0 et A :
   $$\frac{p_0}{\mu_0} + \frac{1}{2}V_\infty^2 + g z_{A_0} = \frac{p_{tot}}{\mu_0} + 0 + g z_A$$
   Les variations d'énergie potentielle étant négligeables par rapport aux variations d'énergie cinétique, on obtient : $\frac{p_{tot}}{\mu_0} = \frac{p_0}{\mu_0} + \frac{1}{2}V_\infty^2$

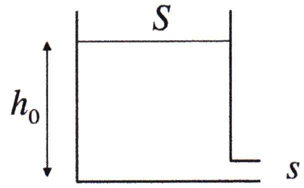
   soit $\boxed{p_{tot} = p_0 + \frac{1}{2}\mu_0 V_\infty^2}$

3. En traçant la ligne de courant passant par B, en déduire une expression de p_{stat}.
   Un tube de courant contenant B_0 et B n'est pas déformé puisqu'il longe le tube de Pitot. Il n'y a donc pas de changement ni de vitesse ni de pression : $\boxed{p_{stat} = p_0}$
4. En déduire que : $$V_\infty = \sqrt{\frac{2\mu_{Hg} g \Delta H}{\mu_0}}$$
   En remplaçant p_{tot} et p_{stat} dans l'expression de la question 1 :
   $$p_0 + \frac{1}{2}\mu_0 V_\infty^2 = p_0 + \mu_{Hg}\, g \Delta H \Rightarrow \frac{1}{2}\mu_0 V_\infty^2 = \mu_{Hg}\, g \Delta H \Rightarrow \boxed{V_\infty = \sqrt{\frac{2\mu_{Hg} g \Delta H}{\mu_0}}}$$ CQFD

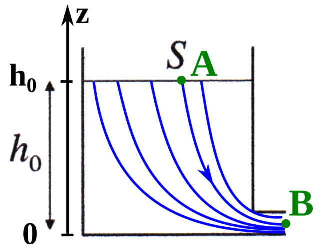
Ex.2 : Vidange d'un réservoir

Le liquide considéré est un fluide parfait supposé incompressible.
La section de l'ouverture de vidange s est petite devant la surface libre S du liquide.



1. Montrer que cela permet de trouver simplement la vitesse d'éjection v_0 en fonction de h_0.
   A.N. : calculer v_0 pour $h_0 = 1$ m.
2. Sous quelle hypothèse peut-on estimer le temps de vidange τ du réservoir ?
   A.N. : exprimer puis calculer τ pour $h_0 = 1$ m, $S = 0,5$ m² et $s = 1,5$ cm².

a) Soit 2 points A et B d'une même ligne de courant : A sur la surface du fluide donc auquel la pression du fluide est celle de l'atmosphère qu'on notera P_0, et B à la sortie en contact avec l'extérieur donc lui aussi à la pression atmosphérique P_0.



Dans le référentiel terrestre supposé galiléen dont l'axe (Oz) est vertical ascendant, en supposant de plus l'écoulement parfait, stationnaire, homogène et incompressible et l'action de la pesanteur uniforme, la relation de Bernoulli entre les points A et B s'écrit :

$$\frac{P_0}{\rho} + \frac{1}{2}v_A^2 + gh_0 = \frac{P_0}{\rho} + \frac{1}{2}v_0^2 + 0$$

Par ailleurs, le fluide étant incompressible le débit volumique se conserve le long d'un tube de courant donc le débit au niveau de la surface est égal au débit sortant : $v_A S = v_0 s$
Or $v_A = v_0 \dfrac{s}{S} \Rightarrow v_A \ll v_0$ puisque $s \ll S$

La relation de Bernoulli devient alors $gh_0 = \dfrac{1}{2}v_0^2 \Rightarrow \boxed{v_0 = \sqrt{2gh_0}}$ (= formule de Toricelli) on trouve la même expression en considérant une chute libre ce qui était prévisible puisqu'il n'y a pas de variation de pression entre A et B, l'énergie potentielle étant convertie en énergie cinétique.

A.N. : $v_0 = \sqrt{2 \times 9,8 \times 1} \underline{= 4,43 \text{ m.s}^{-1}}$

b) Pour estimer le temps de vidange τ, on doit pouvoir appliquer la formule de la vitesse de sortie trouvée à la question précédente à tout instant. Donc il faut :

- supposer que v_A reste négligeable par rapport à la vitesse de sortie pendant toute la vidange, ce qui est nécessairement faux puisque $v(t) = \sqrt{2gh(t)}$ diminue et tend vers 0 lorsque le réservoir se vide car $h(t)$ diminue.
- la relation de Bernoulli doit être applicable ce qui suppose que le régime soit permanent. On doit donc appliquer l'approximation des régimes quasi-stationnaires.

Dans ces conditions, la conservation du débit volumique s'écrit $v_A S = v(t)s$ avec :

- $v_A = -\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ (par définition de la vitesse en faisant attention au signe car la dérivée de h est négative puisque h diminue)
- et $v(t) = \sqrt{2gh(t)}$

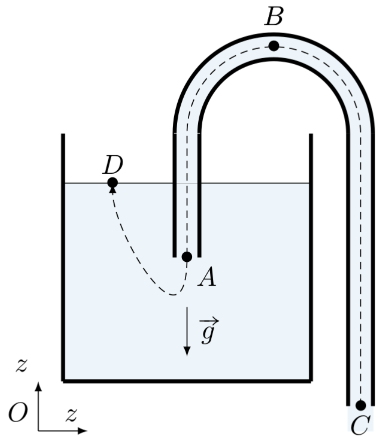
$\Rightarrow -\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}S = s\sqrt{2gh(t)} \Rightarrow$ en séparant les variables $-\dfrac{\mathrm{d}h}{\sqrt{h}}S = s\sqrt{2g}\mathrm{d}t \Rightarrow -S\int_{h_0}^{0}\dfrac{\mathrm{d}h}{\sqrt{h}} = s\sqrt{2g}\int_0^{\tau}\mathrm{d}t$

$\Rightarrow -S[2\sqrt{h}]_{h_0}^{0} = s\sqrt{2g}\tau \Rightarrow -S(0 - 2\sqrt{h_0}) = s\sqrt{2g}\tau \Rightarrow \tau = \dfrac{2S\sqrt{h_0}}{s\sqrt{2g}} \Rightarrow \boxed{\tau = \dfrac{S}{s}\sqrt{\dfrac{2h_0}{g}}}$

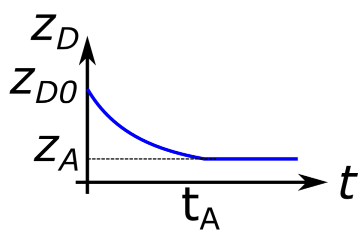
A.N. : $\tau = \dfrac{0,5}{1,5.(10^{-2})^2}\sqrt{\dfrac{2}{10}} = 1500 \text{ s} \underline{= 25 \text{ min}}$

Ex.3 : Utilisation d'un siphon 2 2

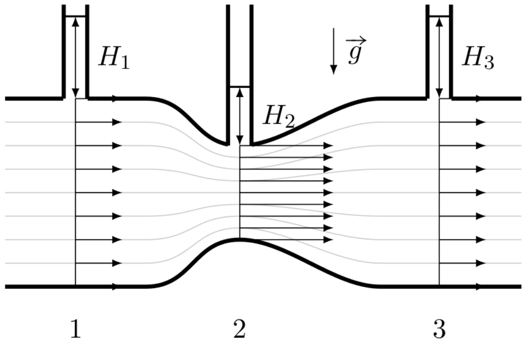
On se propose de vider partiellement un réservoir parallélépipédique contenant un liquide de masse volumique uniforme μ_0 au moyen d'un siphon, c'est à dire d'un tube coudé de section constante s. On note S la section du réservoir.
Soient A le point d'entrée du siphon, B le point le plus haut du siphon, C la sortie du siphon et D un point de la surface libre dans le réservoir. On note z_A, z_B, z_C et z_D les coordonnées correspondantes.
La surface libre du réservoir et l'extrémité C du siphon sont à la pression atmosphérique notée p_{atm}.



1. Considérant que $s \ll S$, que peut-on dire de la vitesse au point C ?
   Par conservation du débit volumique pour un fluide incompressible $sv_C = Sv_D$ soit $v_C = \frac{S}{s}v_D \Rightarrow \boxed{v_C \gg v_D}$
2. Exprimer la vitesse du fluide à la sortie du siphon. En déduire une condition pour que le fluide s'écoule.
   Dans le référentiel terrestre supposé galiléen dont l'axe (Oz) est vertical ascendant, en supposant de plus l'écoulement parfait, stationnaire, homogène et incompressible et l'action de la pesanteur uniforme, la relation de Bernoulli entre les points D et C s'écrit :
   $\frac{p_{atm}}{\mu_0} + \frac{1}{2}v_D^2 + gz_D = \frac{p_{atm}}{\mu_0} + \frac{1}{2}v_C^2 + gz_C$ avec $v_C \gg v_D$
   La relation de Bernoulli devient alors $g(z_D - z_C) = \frac{1}{2}v_C^2 \Rightarrow \boxed{v_C = \sqrt{2g(z_D - z_C)}}$: écoulement si $z_D > z_C$ (sinon racine d'un nombre négatif).
3. Exprimer les pressions p_A et p_B dans le fluide aux points A et B ? Que faut-il faire pour amorcer le siphon ? La hauteur du point B peut-elle être quelconque ?
   La relation de Bernoulli entre A et C s'écrit : $\frac{p_A}{\mu_0} + \frac{1}{2}v_A^2 + gz_A = \frac{p_{atm}}{\mu_0} + \frac{1}{2}v_C^2 + gz_C$ avec $v_C = v_A$ par conservation du débit dans le tube de section constante
   $\Rightarrow \boxed{p_A = p_{atm} - g(z_A - z_C)}$
   De même $\boxed{p_B = p_{atm} - g(z_B - z_C)}$: il fat $p_B > 0$ sinon il y a vaporisation de l'eau donc cavitation et désamorçage du siphon $\Rightarrow$ il faut que $p_{atm} - g(z_B - z_C) > 0$ donc $\boxed{z_B - z_C < \frac{p_{atm}}{g}}$
   Pour amorcer le Siphon, il faut remplir le tube (par exemple en aspirant l'eau par C ou en le plongeant dans le réservoir puis en bouchant l'extrémité C avant de le placer puis de relâcher C.
4. Étudier les variations de z_D en fonction du temps.
   Comme à l'exercice précédent, $v_D = -\frac{\mathrm{d}z_D}{\mathrm{d}t}$ et $v_C = \sqrt{2g(z_D - z_C)}$
   La conservation du débit volumique donne $\Rightarrow -\frac{\mathrm{d}z_D}{\mathrm{d}t}S = s\sqrt{2g(z_D(t) - z_C)} \Rightarrow$ en séparant les variables
   $-\frac{\mathrm{d}z_D}{\sqrt{z_D - z_C}}S = s\sqrt{2g}\mathrm{d}t \Rightarrow -S\int_{z_{D0}}^{z_D(t)} \frac{\mathrm{d}z_D}{\sqrt{z_D - z_C}} = s\sqrt{2g}\int_0^t \mathrm{d}t_A$
   $\Rightarrow -S[2\sqrt{z_D - z_C}]_{z_{D0}}^{z_D(t)} = s\sqrt{2g}t \Rightarrow -S(2\sqrt{z_D(t) - z_C} - 2\sqrt{z_{D0} - z_C}) = s\sqrt{2g}t$
   $\Rightarrow \sqrt{z_D(t) - z_C} = -\frac{s\sqrt{2g}}{2S}t + \sqrt{z_{D0} - z_C}$
   $\Rightarrow \boxed{z_D(t) = z_C + \left(-\frac{s\sqrt{2g}}{2S}t + \sqrt{z_{D0} - z_C}\right)^2}$ jusqu'à t_A tel que $z_D(t_A) = z_A$ alors le siphon se désamorce et z_D reste constant égal à z_A.



Appli.1 : Mesure de débit par effet Venturi 2 1

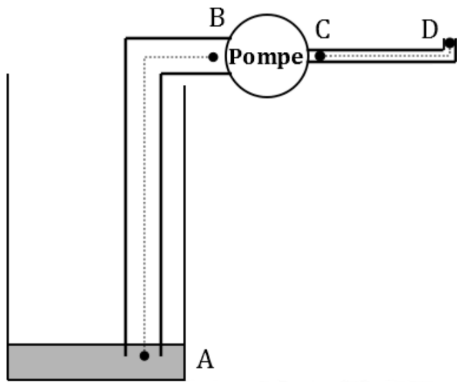


Soit une conduite horizontale de section S variable, alimentée en fluide incompressible de masse volumique $\mu = \mu_0$ par un débit volumique D_v. On suppose que le profil de vitesse dans toute section perpendiculaire à l'axe de la conduite est uniforme, de sorte que la pression est également uniforme sur chaque section.
La conduite a la forme ci-contre :

1. Exprimer la relation entre les vitesses v_1 et v_2 et les sections S_1 et S_2. Conclure sur l'évolution de la vitesse dans le rétrécissement. Est-ce cohérent avec les lignes de courant tracées ?
   Par conservation du débit volumique pour un fluide incompressible $v_1 S_1 = v_2 S_2$ soit $v_2 = \frac{S_1}{S_2} v_1$ avec $\frac{S_1}{S_2} > 1$
   $\Rightarrow \boxed{v_2 > v_1}$: la vitesse augmente dans le rétrécissement ce qui est cohérent avec le fait que les lignes de courant se resserrent.
2. Établir l'expression de la pression p_i qui règne dans la section i en fonction de p_0, μ_0, g et H_i.
   Le fluide étant statique dans les tubes, la relation de la statique des fluides pour un fluide incompressible s'écrit $\boxed{p_i = p_0 + \mu_0 g H_i}$
3. On note $\Delta H = H_1 - H_2$, relier la pression p_1 à p_2, ΔH, μ_0 et g.
   $p_1 - p_2 = p_0 + \mu_0 g H_1 - (p_0 + \mu_0 g H_2) = \mu_0 g (H_1 - H_2) \Rightarrow \boxed{p_1 = p_2 + \mu_0 g \Delta H}$
4. Établir une première expression de v_2 en fonction de v_1 et de ΔH et g.
   Dans le référentiel terrestre supposé galiléen dont l'axe (Oz) est vertical ascendant, en supposant de plus l'écoulement parfait, stationnaire, homogène et incompressible et l'action de la pesanteur uniforme, la relation de Bernoulli sur la ligne de courant horizontale centrale entre les points 1 et 2 (à la même altitude) respectivement sous les tubes 1 et 2 s'écrit :
   $\frac{p_1}{\mu_0} + \frac{1}{2} v_1^2 + gz = \frac{p_2}{\mu_0} + \frac{1}{2} v_2^2 + gz.$
   $\Rightarrow \boxed{v_2^2 = v_1^2 + \frac{2(p_1 - p_2)}{\mu_0}}$
5. En déduire une expression du débit D_v en fonction, entre autres, du ratio $\frac{S_1}{S_2}$.
   Par conservation du débit $v_2 = \frac{S_1}{S_2} v_1$ d'après la question 1.
   Et $p_1 - p_2 = \mu_0 g \Delta H$ d'après la question 3.
   $\Rightarrow \frac{S_1^2}{S_2^2} v_1^2 = v_1^2 + 2g\Delta H \Rightarrow v_1^2 \left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1 \right) = 2g\Delta H \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2g\Delta H}{\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1}}$
   Avec $D_v = S_1 v_1$ on obtient : $\boxed{D_v = S_1 \sqrt{\frac{2g\Delta H}{\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1}}}$

Ecoulement d'un fluide parfait avec partie mobile

Appli.2 : Pompe 2 1



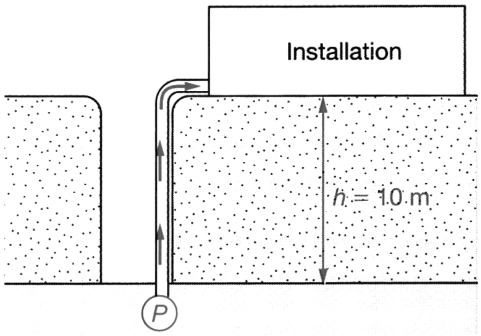
Soit un bloc pompe qui puise de l'eau au fond d'un puits de profondeur $H = 5$ m.
• La section AB fait 100 cm² et celle de CD fait 10 cm².
• La pression atmosphérique est de 1000 hPa, la pression de vapeur saturante de l'eau est de $2,3$ kPa (à 20°C).
• Le débit volumique est $D_v = 10$ L.s⁻¹.
E est le point le plus haut atteint par le jet d'eau.

1. Quelles hypothèses peut-on faire sur le fluide, sur l'écoulement ?
   Eau ⇒ Fluide incompressible, en écoulement stationnaire.
2. Quelle est la vitesse du fluide en A ?
   $D_v = v_A S_A \Rightarrow \boxed{v_A = \dfrac{D_v}{S_A}} = \dfrac{10.10^{-3}}{100.(10^{-2})^2} \underline{= 1 \text{ m.s}^{-1}}$
3. Que vaut la pression en B ? Y a-t-il risque de cavitation ? (La cavitation correspond à la formation de bulles de vapeur dans un liquide soumis localement à une baisse de pression).
   Dans le référentiel terrestre supposé galiléen dont l'axe (Oz) est vertical ascendant, en supposant de plus l'écoulement parfait, stationnaire, homogène et incompressible et l'action de la pesanteur uniforme, la relation de Bernoulli entre un point à la surface de l'eau du puits (où on peut négliger la vitesse et qui est à pression atmosphérique) et le point B s'écrit :
   $\dfrac{P_{atm}}{\rho} + 0 + 0 = \dfrac{P_B}{\rho} + \dfrac{1}{2}v_B^2 + gH$ avec $v_B = v_A$ par conservation de D_v dans le tuyau de section cste
   $\Rightarrow \boxed{P_B = P_{atm} - \dfrac{1}{2}\rho v_A^2 - \rho g H}$
   A.N. : $P_B = 10^5 - \dfrac{10^3}{2} \times 1^2 - 10^3 \times 10 \times 5 = 10^3(100 - 0,5 - 50) = 50.10^3$ Pa$= 50$ kPa : pour atteindre la pression de vapeur saturante, ile faudrait une hauteur environ 2 fois plus grande ou une vitesse (donc un débit) 10 fois plus grand ⇒ peu de risque de cavitation avec l'installation présentée.
4. Quelle puissance actionne la pompe ?
   La relation de Bernoulli avec partie mobile appliquée entre un point à la surface de l'eau du puits et le point D donne : $\dfrac{P_{atm}}{\rho} + \dfrac{1}{2}v_D^2 + gH = \dfrac{P_{atm}}{\rho} + 0 + 0 + w_i \Rightarrow D_m\left(\dfrac{1}{2}v_D^2 + gH\right) = D_m w_i = \mathcal{P}_i$ avec $D_v = S_D v_D$
   $\Rightarrow \boxed{\mathcal{P}_i = \rho D_v \left(\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{D_v}{S_D}\right)^2 + gH\right)} = 10^3 \times 10.10^{-3}\left(\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{10.10^{-3}}{10.(10^{-2})^2}\right)^2 + 10 \times 5\right) = 10 \times (50+50) \underline{= 1 \text{ kW}}$
5. Quelle altitude maximale pourra atteindre le jet d'eau ?
   La relation de Bernoulli avec partie mobile appliquée entre un point à la surface de l'eau du puits et le point E au sommet du jet s'écrit :
   $\dfrac{P_{atm}}{\rho} + \dfrac{1}{2}v_E^2 + gH_{max} = \dfrac{P_{atm}}{\rho} + 0 + 0 + w_i$ avec $v_E = 0$ au sommet
   ⇒ en puissance $D_m g H_{max} = \mathcal{P}_i$
   $\Rightarrow \boxed{H_{max} = \dfrac{\mathcal{P}_i}{\rho D_v g}} = \dfrac{10^3}{10^3 \times 10.10^{-3} \times 10} \underline{= 10 \text{ m}}$: soit 5 m au dessus de D.

Ex.4 : Ordre de grandeur d'une puissance indiquée 1 1

Une pompe immergée 10 mètres sous terre doit permettre de remonter de l'eau dans une installation située à la surface. La pression du liquide au niveau du captage est voisine de la pression atmosphérique et on désire disposer d'un débit égal à 7 m³.h⁻¹ avec, dans l'installation, une pression supérieure à la pression atmosphérique de $2,5$ bar. Les sections des conduites sont identiques et on se place en régime stationnaire.

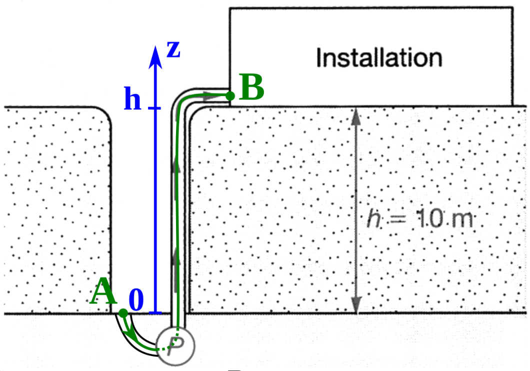
On se livre ici à une estimation grossière visant à dégager un ordre de grandeur de la puissance indiquée Ψ_i : toutes les causes de perte sont donc ignorées.



1. Estimer le travail indiqué massique nécessaire.
2. En déduire une estimation de la puissance indiquée.
3. Comparer à la puissance de fonctionnement d'un ustensile ménager courant.

a) *Les pertes sont toutes négligées, donc on peut appliquer la relation de "Bernoulli généralisée".*

Dans le référentiel terrestre supposé galiléen dont l'axe (Oz) est vertical ascendant (*tracé sur le schéma ci-contre, avec son origine choisie au point le plus bas*), en supposant l'écoulement sans pertes mais avec l'apport d'une énergie massique w_i, stationnaire, homogène et incompressible et l'action de la pesanteur uniforme, la relation de Bernoulli entre le point de captage A à la pression atmosphérique P_{atm} et le point d'entrée de l'installation B à la pression $P_B = P_{\text{atm}} + 2,5$ bar (ils appartiennent à une même ligne de courant) s'écrit :



Energie massique en sortie = Energie massique en entrée $+w_i \Rightarrow \dfrac{P_B}{\mu} + \dfrac{1}{2}v_B^2 + gh = \dfrac{P_{\text{atm}}}{\mu} + \dfrac{1}{2}v_A^2 + 0 + w_i$

Or l'eau étant supposée incompressible, le débit volumique se conserve entre A et B : $v_A S_A = v_B S_B$.
Et les sections des conduites étant identiques, on obtient $v_A = v_B$ (la vitesse se conserve).

La relation de Bernoulli devient alors : $\boxed{w_i = \dfrac{P_B - P_{\text{atm}}}{\mu} + gh}$

A.N. avec μ de l'eau $= 10^3$ kg.m⁻³ : $w_i = \dfrac{2,5.10^5}{10^3} + 10 \times 10 = 2,5.10^2 + 10^2 \underline{= 3,5.10^2 \text{ J.kg}^{-1}}$

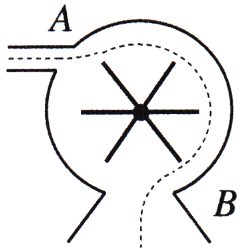
b) La puissance indiquée de la pompe étant le travail massique multiplié par le débit massique :
$\Psi_i = D_m w_i$ avec $D_m = \mu D_v \Rightarrow \boxed{\Psi_i = \mu D_v w_i} = 10^3 \times \dfrac{7}{3600} \times 3,5.10^2 = \dfrac{7}{3,6} \times 3,5.10^2 \underline{\approx 7.10^2 \text{ W}}$

c) Cette puissance est comparable à celle d'un ustensile ménager (aspirateur, sèche-cheveux, bouilloire).

Ex.5 : Puissance fournie à une turbine

2 1

De l'eau circule dans une turbine de A vers B; les diamètres d'entrée et de sortie sont $\Phi_A = 30$ cm et $\Phi_B = 60$ cm. Le débit volumique est $D_V = 0,22$ m³.s⁻¹ et la dénivellation est $z_A - z_B = 1$ m. Les pressions du liquide en A et B par rapport à la pression atmosphérique sont $\Delta P_A = 1,5$ kg.cm⁻² et $\Delta P_B = -0,35$ kg.cm⁻².



L'eau est ici un fluide incompressible de masse volumique $\rho = 1$ g.cm⁻³.

Evaluer numériquement chacun des trois termes qui contribuent à la puissance fournie par l'eau à la turbine et commenter.

La turbine est une partie mobile qui reçoit de l'énergie de la part de l'eau, autrement dit l'eau reçoit à la traversée de la turbine une énergie massique w_i négative (puisqu'elle fournit effectivement de l'énergie à la turbine). Il s'agit encore de l'application de la relation de "Bernoulli généralisé".

Dans le référentiel terrestre supposé galiléen dont l'axe (Oz) est vertical ascendant, en supposant l'écoulement sans pertes de charges (mais avec l'apport d'une énergie massique w_i), stationnaire, homogène et incompressible et l'action de la pesanteur uniforme, la relation de Bernoulli entre l'entrée A et la sortie B de la turbine (ils appartiennent à une même ligne de courant) s'écrit : Energie massique en sortie = Energie massique en entrée $+w_i \Rightarrow$
$\dfrac{P_B}{\rho} + \dfrac{1}{2}v_B^2 + gz_B = \dfrac{P_A}{\rho} + \dfrac{1}{2}v_A^2 + gz_A + w_i$

Par ailleurs la puissance fournie par l'eau à la turbine vaut $\mathcal{P} = -$Puissance reçue par l'eau$= -D_m w_i = -\rho D_v w_i$

$$\Rightarrow \mathcal{P} = -\rho D_v \left[\frac{P_B}{\rho} + \frac{1}{2}v_B^2 + gz_B - (\frac{P_A}{\rho} + \frac{1}{2}v_A^2 + gz_A)\right]$$
$$\Rightarrow \mathcal{P} = -\rho D_v \left[\frac{P_B - P_A}{\rho} + \frac{1}{2}(v_B^2 - v_A^2) + g(z_B - z_A)\right]$$
$$\Rightarrow \mathcal{P} = -\rho D_v \left[\frac{P_{atm} + \Delta P_B - (P_{atm} + \Delta P_A)}{\rho} + \frac{1}{2}(v_B^2 - v_A^2) + g(z_B - z_A)\right]$$

Avec $D_v = v_A S_A = v_A \dfrac{\pi\Phi_A^2}{4}$ donc $v_A = \dfrac{4D_v}{\pi\Phi_A^2}$ et de même $v_B = \dfrac{4D_v}{\pi\Phi_B^2}$

$$\Rightarrow \mathcal{P} = \rho D_v \left[\frac{\Delta P_A - \Delta P_B}{\rho} + \frac{1}{2}(v_A^2 - v_B^2) + g(z_A - z_B)\right]$$
$$\Rightarrow \mathcal{P} = \rho D_v \left[\frac{\Delta P_A - \Delta P_B}{\rho} + \frac{1}{2}(\frac{16D_v^2}{\pi^2\Phi_A^4} - \frac{16D_v^2}{\pi^2\Phi_B^4}) + g(z_A - z_B)\right]$$
$$\Rightarrow \mathcal{P} = \rho D_v \left[\frac{\Delta P_A - \Delta P_B}{\rho} + \frac{8D_v^2}{\pi^2}(\frac{1}{\Phi_A^4} - \frac{1}{\Phi_B^4}) + g(z_A - z_B)\right]$$
$$\Rightarrow \mathcal{P} = D_v(\Delta P_A - \Delta P_B) + \frac{8\rho D_v^3}{\pi^2}(\frac{1}{\Phi_A^4} - \frac{1}{\Phi_B^4}) + \rho g D_v(z_A - z_B)$$

$\boxed{\mathcal{P}_1 = D_v(\Delta P_A - \Delta P_B)} = 0,22 \times (1,5 + 0,35) \times 10 \times (10^2)^2$ (*ne pas oublier de multiplier les données de pression par g pour obtenir des Pa.cm-² puis par $(10^2)^2$ pour obtenir des Pa.m-²*)

$\Rightarrow \mathcal{P}_1 = 0,22 \times 1,85 \times 10^5 \underline{= 4,1.10^4 \text{ W}}$

$$\boxed{\mathcal{P}_2 = \frac{8\rho D_v^3}{\pi^2\Phi_A^4}\left(\frac{1}{\Phi_A^4} - \frac{1}{\Phi_B^2}\right)} = \frac{8 \times 10^3 \times 0,22^3}{3,14^2}\left(\frac{1}{0,3^4} - \frac{1}{0,6^4}\right) \underline{= 1,0.10^3 \text{ W}}$$

$\boxed{\mathcal{P}_3 = \rho g D_v(z_A - z_B)} = 10^3 \times 10 \times 0,22 \times 1 \underline{= 2,2.10^3 \text{ W}}$

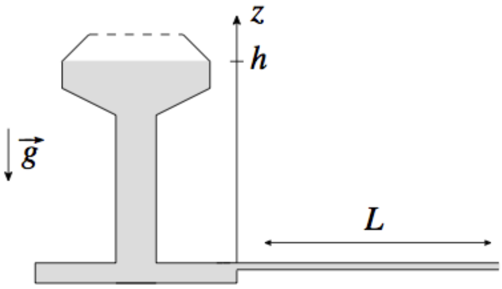
$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_3$ $\underline{= 44 \text{ kW}}$ et la grande majorité de la puissance provient de la chute de pression, les variations de vitesse et d'altitude ne contribuant que peu à la puissance fournie par l'eau à la turbine.

Fluide et écoulement visqueux

Ex.6 : Distribution d'eau potable 2 2

Un château d'eau de hauteur $h = 25$ m, alimente un village en eau potable. On rappelle que l'eau a une masse volumique $\mu_0 = 1,0.10^3$ kg.m⁻³ et une viscosité dynamique $\eta = 1,0.10^{-3}$ Pl.

Une canalisation de longueur $L = 100$ m et de section $S = 1$ cm² part du pied de ce château d'eau. L'autre extrémité est à l'air libre.



Le fluide s'écoule sous l'effet de la différence de pression qui existe entre l'entrée et la sortie de cette canalisation. Dans le cas d'un écoulement laminaire, il s'agit d'un écoulement de Poiseuille cylindrique pour lequel la vitesse vaut $\vec{v}(M) = \dfrac{(P_e - P_s)(R^2 - r^2)}{4\eta L}\vec{u}_z$ où P_s est la pression de sortie.

On rappelle l'expression du nombre de Reynolds : $R_e = \dfrac{vD\mu}{\eta}$ avec v vitesse caractéristique de l'écoulement, D distance typique transversale, μ masse volumique en kg.m⁻³, et η viscosité dynamique du fluide.

1. Quel est l'ordre de grandeur de la pression P_e qui peut être attendue au pied du château d'eau, en admettant que le débit d'eau dans la canalisation soit suffisamment faible pour ne pas perturber la pression ?
2. Quel débit peut on attendre en sortie de la canalisation, en supposant a priori l'écoulement laminaire ? Calculer la vitesse débitante U .
3. Calculer le nombre de Reynolds pour cet écoulement, et conclure.
4. Dans certaines maisons anciennes, les débits de sortie ne sont pas suffisants, on dit qu'on manque de pression. Qu'est-il préférable de faire pour obtenir un débit plus important ?

1. Si le débit d'eau est "suffisamment faible", l'eau peut être considérée quasi-statique et la relation de la statique des fluides entre un point A à la surface libre de l'eau (à la pression atmosphérique) et le point B au pied du château d'eau donne : $P_B = P_{atm} + \mu_0 gh \Rightarrow \boxed{P_e = P_{atm} + \mu_0 gh} = 10^5 + 10^3 \times 10 \times 25 = 3,5.10^5$ Pa $\underline{= 3,5 \text{ bar}}$.

2. L'énoncé fournit l'expression du champ des vitesses dans la canalisation dans le cas d'un écoulement laminaire : $\vec{v}(M) = \dfrac{(P_e - P_s)(R^2 - r^2)}{4\eta L}\vec{u}_z$. On observe que $\vec{v}(M) = v(r)\vec{u}_z$.

L'expression du débit volumique étant $D_v = \iint_{Section} \vec{v}\mathrm{d}\vec{S}$, on doit alors découper la section en anneau de périmètre $2\pi r$ et d'épaisseur dr $\Rightarrow D_v = \int_0^R v(r)2\pi r\mathrm{d}r = \int_0^R \dfrac{(P_e - P_s)(R^2 - r^2)}{4\eta L}2\pi r\mathrm{d}r$

$$\Rightarrow D_v = \frac{\pi}{2\eta L}(P_e - P_s)\int_0^R (R^2 - r^2)r\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2\eta L}(P_e - P_s)\left[R^2\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{\pi}{2\eta L}(P_e - P_s)\left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4}\right)$$

$$\Rightarrow D_v = \frac{\pi}{2\eta L}(P_e - P_s) \times \frac{R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{8\eta L}(P_e - P_s) \text{ avec } S = \pi R^2 \Rightarrow R^2 = \frac{S}{\pi}$$

D'où $\boxed{D_v = \dfrac{S^2}{8\eta L\pi}(P_e - P_{atm})} = \dfrac{((10^{-2})^2)^2}{8 \times 10^{-3} \times 100 \times 3,14}(3,5 - 1).10^5 = \dfrac{2,5}{8 \times 3,14}.10^{-2} \underline{= 1,0.10^{-3} \text{ m}^3.\text{s}^{-1}}$

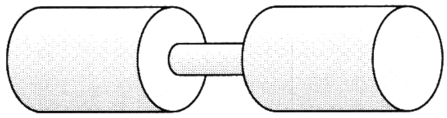
La vitesse débitante U vérifie $D_v = US \Rightarrow \boxed{U = \dfrac{D_v}{S}} = \dfrac{10^{-3}}{10^{-4}} \underline{= 10 \text{ m.s}^{-1}}$

3. $R_e = \dfrac{UD\mu_0}{\eta}$ avec D tel que $S = \dfrac{\pi D^2}{4} \Rightarrow R_e = \dfrac{U\mu_0}{\eta} \times \sqrt{\dfrac{4S}{\pi}} \Rightarrow \boxed{R_e = \dfrac{U\mu_0}{\eta}\sqrt{\dfrac{4S}{\pi}}}$

A.N. : $R_e = \dfrac{10 \times 10^3}{10^{-3}}\sqrt{\dfrac{4.10^{-4}}{3,14}} = 10^7\sqrt{\dfrac{4}{3,14}}.10^{-2}$ $\underline{\approx 10^5 \text{ : l'écoulement est turbulent}}$ car $R_e > 2000$.

4. Pour augmenter D_v, soit on augmente la section S, soit la vitesse U en diminuant L d'après la formule. Augmenter S est plus facile (on n'a pas à déplacer la baignoire ou la cuisine !). Le plus souvent c'est le tartre qui est la cause de la chute de pression $\Rightarrow$ un détartrage ou un changement de tuyau règle le problème.

Ex.7 : Règle de la plus faible section 2 1



Lorsqu'une installation complexe comporte plusieurs tronçons de conduites mis en série, on a coutume de considérer la perte de charge dominante comme celle donnée par la portion de plus faible section.

On rappelle l'expression du nombre de Reynolds $R_e = \dfrac{vd\mu}{\eta}$.

Commenter cette affirmation en utilisant la loi de Poiseuille qui donne la perte de charge pour un écoulement à faible nombre de Reynolds ($R_e < 2000$) :

$$\Delta P_C = \frac{64}{R_e}\frac{\ell}{d}\mu\frac{v^2}{2}$$

Soient 2 sections S et S' telle que $S' < S$.

En considérant l'écoulement d'un fluide incompressible, la conservation du débit conduit à $Sv = S'v' \Rightarrow \dfrac{v'}{v} = \dfrac{S}{S'}$

Donc les nombres de Reynolds pour ces 2 sections de diamètres respectifs d et d' parcouru par le même fluide ont pour rapport : $\dfrac{R'_e}{R_e} = \dfrac{v'd'}{vd} = \dfrac{S}{S'}\dfrac{d'}{d}$.

Or $S = \dfrac{\pi d^2}{4}$, donc $d = \sqrt{\dfrac{4S}{\pi}} \Rightarrow \dfrac{R'_e}{R_e} = \dfrac{S}{S'}\sqrt{\dfrac{S'}{S}} = \sqrt{\dfrac{S^2}{S'^2}}\sqrt{\dfrac{S'}{S}} = \sqrt{\dfrac{S^2}{S'^2} \times \dfrac{S'}{S}} = \sqrt{\dfrac{S}{S'}}$

D'où $\dfrac{\Delta P'_C}{\Delta P_C} = \dfrac{R_e}{R'_e} \times \dfrac{l'}{l} \times \dfrac{v'^2}{v^2} \times \dfrac{d}{d'} = \sqrt{\dfrac{S'}{S}} \times \dfrac{l'}{l} \times \dfrac{S^2}{S'^2} \times \sqrt{\dfrac{S}{S'}} = \dfrac{l'}{l} \times \left(\dfrac{S}{S'}\right)^2$

Or $S' < S$, donc $\dfrac{S}{S'} > 1$ et si les tronçons ont des longueurs équivalentes on obtient $\dfrac{\Delta P'_C}{\Delta P_C} > 1$ soit $\Delta P'_C > \Delta P_C$: c'est donc bien la portion de plus faible section qui provoque la perte de charge régulière la plus grande. Cependant cette affirmation est à moduler selon les longueurs respectives des tronçons. De plus, les pertes de charges singulières dues au changement de section est d'autant moins négligeable que le tronçon est court ce qui rend dans ce cas l'affirmation fausse.

Appli.3 : Pertes de charge et puissance d'une pompe 1 1

Dans une conduite horizontale d'une longueur de 500 m où circule un fluide de masse volumique 1000 kg.m⁻³ avec un débit de 80 m³.h⁻¹, les frottements font perdre au fluide l'équivalent en pression de 3 cm de fluide pour une longueur de 2 m de canalisation.

1. Quel est le type de perte de charge ?
   Pertes de charge régulières (car dans canalisation droite).
2. Calculer en Pa cette perte de charge pour un mètre de canalisation.
   Par homogénéité des termes de la relation de Bernoulli : $\dfrac{\Delta P_C}{\rho} = g\Delta z_C$
   $\Rightarrow \boxed{\Delta P_C = \rho g \Delta z_C}$ avec $\Delta z_C = 3cm/2$ pour 1m de canalisation
   $\Rightarrow \Delta P_C = 10^3 \times 10 \times \dfrac{3.10^{-2}}{2} \underline{= 150 \text{ Pa}}$
3. Quelle serait la puissance utile d'une pompe qui compenserait cette perte de charge pour 1 mètre de canalisation ?
   $\mathcal{P}_i = \dfrac{\Delta P_C}{\rho} \times D_m$ soit $\boxed{\mathcal{P}_i = \Delta P_C D_v} = 150 \times 80/3600 = 15 \times 2/9 \underline{= 3,3 \text{ W}}$
4. Quelle serait la puissance minimale de la pompe qui permettrait de faire circuler le liquide sur la longueur de 500 m ?
   Il faut $3,3$ W par mètre de canalisation donc $\mathcal{P}_{min} = 500 \times 3,3 \underline{= 1650 \text{ W}}$

Appli.4 : Écritures du théorème de Bernoulli

1 0

Parmi les écritures ci-dessous du théorème de Bernoulli, indiquer lesquelles sont correctes, lesquelles sont fausses, et pourquoi. Pour chaque écriture correcte, préciser la dimension des termes intervenant.
On note les pertes de charge $\Delta P > 0$ (homogène à une pression) ou $\Delta h > 0$ (homogène à une hauteur).

1) $\dfrac{P}{\rho} + \dfrac{1}{2}v^2 + gz = cste$ **2)** $D_v\left(P_s + \dfrac{1}{2}\rho v_s^2 + \rho g z_s\right) - D_v\left(P_e + \dfrac{1}{2}\rho v_e^2 + \rho g z_e\right) = \mathcal{P}_i - D_v \Delta P$

1) Vrai, homogène à une énergie massique 2) Vrai, homogène à une puissance

3) $\dfrac{P}{\rho g} + \dfrac{1}{2g}v^2 + z = cste$ **4)** $\left(\dfrac{P_s}{\rho} + \dfrac{1}{2}v_s^2 + g z_s\right) - \left(\dfrac{P_e}{\rho} + \dfrac{1}{2}v_e^2 + g z_e\right) = -\Delta P$

3) Vrai, homogène à une hauteur 4) Faux : P/ρ et ΔP dans la même équation

5) $P + \dfrac{1}{2}\rho v^2 + gz = cste$ **6)** $\left(P_s + \dfrac{1}{2}\rho v_s^2 + \rho g z_s\right) - \left(P_e + \dfrac{1}{2}\rho v_e^2 + \rho g z_e\right) = \rho w_i$

5) Faux : gz est une énergie massique mais $\dfrac{1}{2}\rho v^2$ une énergie volumique (ou pression)

6) Vrai, homogène à une pression (ou une énergie volumique)

7) $D_m\left(\dfrac{P_s}{\rho} + \dfrac{1}{2}v_s^2 + g z_s\right) - D_m\left(\dfrac{P_e}{\rho} + \dfrac{1}{2}v_e^2 + g z_e\right) = D_m g \Delta h$

7) Faux : l'équation est homogène, mais la perte de charge traduit une dissipation et il manque donc le signe "$-$"

8) $\left(\dfrac{P_s}{\rho} + \dfrac{1}{2}v_s^2 + g z_s\right) - \left(\dfrac{P_e}{\rho} + \dfrac{1}{2}v_e^2 + g z_e\right) = -g\Delta h$ **9)** $\left(\dfrac{P_s}{\rho} + \dfrac{1}{2}v_s^2 + z_s\right) - \left(\dfrac{P_e}{\rho} + \dfrac{1}{2}v_e^2 + z_e\right) = w_i$

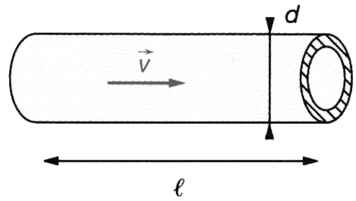
8) Vrai, homogène à une énergie massique 9) Faux, z est une hauteur mais évidemment pas v^2 ni w_i

10) $D_m\left(\dfrac{P_s}{\rho} + \dfrac{1}{2}v_s^2 + g z_s\right) - D_m\left(\dfrac{P_e}{\rho} + \dfrac{1}{2}v_e^2 + g z_e\right) = w_i$

10) Faux, membre de gauche homogène à une puissance et membre de droite à une énergie massique

Ex.8 : Calcul d'une perte de charge régulière ✎ 1 1

On s'intéresse à un écoulement d'eau liquide dans une conduite de diamètre $d = 32$ mm avec un débit volumique constant $D_V = 5$ m³.h⁻¹



On énonce généralement une règle d'usage simple, dans ce cas particulier : "la perte de charge correspond à $0,1$ mètre par unité de longueur de canalisation". On désire confronter cette règle de calcul très simple à ce que l'utilisation d'une loi plus élaborée permet de prévoir.

1. Déterminer la vitesse moyenne de l'écoulement et en déduire son nombre de Reynolds défini par $R_e = \dfrac{vd\mu}{\eta}$, avec $\mu = 10^3$ kg.m⁻³ et $\eta = 10^{-3}$ Pl.
2. Pour des écoulements dont le nombre de Reynolds est compris entre 2000 et 10^5, la perte de charge peut être calculée par la formule de Blasius :
$$\Delta P_C = 0,316\, R_e^{-0,25} \frac{\ell}{d} \mu \frac{v^2}{2}$$
où ℓ est la longueur de canalisation.
Déterminer la perte de charge par unité de longueur de canalisation $\dfrac{\Delta P_C}{\ell}$ dans le cas envisagé et vérifier l'ordre de grandeur proposé par la règle simple : $\dfrac{\Delta z_C}{\ell} = 0,1$.
3. La règle d'usage convient-elle pour un débit allant de 2 m³.h⁻¹ à 7 m³.h⁻¹ ?

a) L'énoncé donne D_v et le diamètre d de la canalisation.
Or $D_v = vS = v\dfrac{\pi d^2}{4} \Rightarrow \boxed{v = \dfrac{4D_v}{\pi d^2}} = \dfrac{4 \times 5/3600}{3,14 \times (32.10^{-3})^2} \underline{= 1,73 \text{ m.s}^{-1}}$

$R_e = \dfrac{vd\mu}{\eta} = \dfrac{1,73 \times 32.10^{-3} \times 10^3}{10^{-3}}$ $\underline{= 5,5.10^4 \;> 2000 \text{ : l'écoulement est turbulent}}$

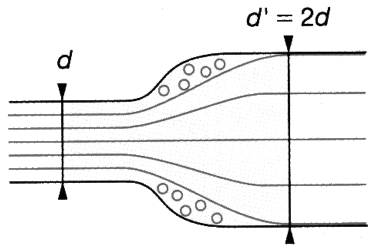
b) $\dfrac{\Delta P_C}{l} = 0,316 R_e^{-0,25} \dfrac{\mu v^2}{2d} = 0,316 \times (5,5.10^4)^{-0,25} \dfrac{10^3 \times 1,73}{2 \times 32.10^{-3}}$ $\underline{8,6.10^2 \text{ Pa.m}^{-1}}$

Pour convertir les pertes de charge exprimées en variation de pression ΔP_C en celles en variation de hauteur Δz_C, il faut utiliser l'homogénéité des termes de la relation de Bernoulli :
$$P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2 = \left(P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1\right) - \Delta P_C \Leftrightarrow \frac{P_2}{\rho g} + \frac{1}{2g}v_2^2 + z_2 = \left(\frac{P_1}{\rho g} + \frac{1}{2g}v_1^2 + z_1\right) - \Delta z_C$$
$$\Rightarrow \Delta z_C = \frac{\Delta P_C}{\mu g} \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta z_C}{l} = \frac{\Delta P_C}{\mu g l}} = \frac{8,6.10^2}{10^3 \times 10} \underline{= 8,6.10^{-2} \approx 0,1} \text{ CQFD}$$

c) En reprenant les calculs des questiona a) et b),
$D_v = 2$ m³.h⁻¹ $\Rightarrow v = 0,7$ m.s⁻¹ $\Rightarrow R_e = 2,2.10^4 \Rightarrow \dfrac{\Delta z_C}{l} = 0,02$: pertes sur-estimées
$D_v = 7$ m³.h⁻¹ $\Rightarrow v = 2,42$ m.s⁻¹ $\Rightarrow R_e = 7,7.10^2 \Rightarrow \dfrac{\Delta z_C}{l} = 0,17$: pertes sous-estimées

Ex.9 : Perte de charge dans un élargissement

1 1



Une conduite cylindrique parcourue par un écoulement incompressible et stationnaire présente un changement de section. Le diamètre aval est le double du diamètre amont : $d' = 2d$. On ne prend pas en compte les effets de pesanteur.

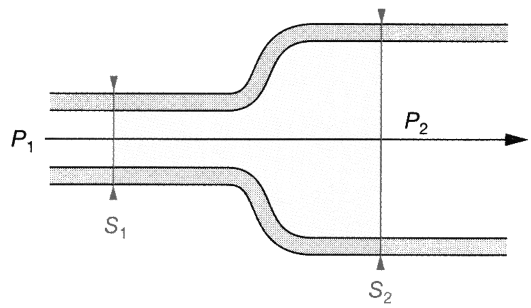
1. Lorsqu'on suppose le fluide parfait et les conditions d'application de la formule de Bernoulli réunies, déterminer la variation de pression $P - P'$ entre amont et aval, en fonction de l'énergie cinétique volumique du fluide en amont $e_{c,v} = \mu \dfrac{v^2}{2}$. Commenter le signe.
2. Une étude plus précise de l'écoulement met en évidence l'existence d'une zone morte (zone de fluide immobile) sur la partie latérale située juste derrière l'élargissement. On montre alors que la différence de pression entre l'amont et une section située en avalde cette zone s'écrit : $P - P' = \mu v'(v' - v)$ (théorème de Bélanger). En déduire, dans le cadre de l'application de cette relation, la nouvelle expression de la différence de pression $P - P'$ en fonction de $e_{c,v}$.
3. Quel est l'écart relatif entre les deux résultats ? Commenter.
4. Proposer une expression pour la perte de charge singulière ΔP_C, en fonction de $e_{c,v}$, dans le cas de l'élargissement de section envisagé ici. Commenter le signe du résultat.

Ex.10 : Perte de charge singulière

2 1

Une conduite cylindrique horizontale présente un évasement brutal : la section en aval étant supérieure à la section en amont : $S_2 > S_1$.

On admet la relation (formule de Bélanger) qui énonce que, pour un écoulement stationnaire d'un fluide incompressible, les pressions et vitesse en amont et en aval de la transition (indices respectifs 1 et 2) sont liées par :



$$P_1 - P_2 = \mu v_2 (v_2 - v_1)$$

1. Exprimer le rapport $\dfrac{P_1 - P_2}{e_{c,v}}$ entre ls différence de pression et l'énergie cinétique volumique en amont, en fonction du rapport des sections $x = \dfrac{S_1}{S_2}$.
   Représenter le graphe de la courbe $\dfrac{P_1 - P_2}{e_{c,v}} = f(x)$ et interpréter.
2. Définir la perte de charge singulière ΔP_C et l'exprimer en fonction de μ, v_1, v_2.
3. Commenter le signe de ΔP_C. Peut-elle s'annuler ?